

Куличенко Андрей Александрович

**МОДЕЛИ НЕЛОКАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ В ПЛАЗМЕ**

Специальность: 1.3.3. Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Работа апробацию в Федеральном государственном бюджетном учреждении «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» (НИЦ «Курчатовский институт»)

Научный руководитель: Кукушкин Александр Борисович – доктор физико-математических наук

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Объединенный институт высоких температур Российской академии наук

Защита состоится **27 декабря 2023г. в 13 часов 00 минут** на заседании диссертационного совета **ЛФИ.1.3.3.004**, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (МФТИ, Физтех)

по адресу: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МФТИ, Физтех и на сайте организации <https://mipt.ru>

Автореферат разослан «___» _____ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, к.ф.-м.н.

Кузьмичев Павел Константинович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Актуальность разработки новых методов моделирования нелокального переноса в лабораторной и астрофизической плазме обусловлена известной трудностью решения уравнений переноса, интегральных по пространству и волновым числам переносчиков энергии (фотонов, плазмонов, быстрых частиц и др.). Нелокальность переноса характеризуется невозможностью сведения интегральных уравнений к дифференциальным уравнениям диффузионного типа и существенным отличием динамики эффективного фронта возбуждения среды мгновенным точечным источником $r_{fr}(t) \propto t^\beta$, $\beta > 1/2$ (расстояние r и время t отсчитываются от точки источника) от обычной диффузии ($\beta = 1/2$). Такой тип переноса получил название супердиффузионного. Связанная с ним и получившая широкое распространение концепция «полетов Леви» (Levy flights), введенная Мандельбротом [1, 2] (см. с. IX в [2], [3–5]), которая в случае учета конечной скорости переносчиков получила название «прогулок Леви» (Levy walks), актуальна для переноса резонансного излучения в астрофизических газах и плазме [6–8] (например, вспышечных явлений в звездах), биологической миграции (разд. 6 в [9]), переноса энергии ЭМ волнами в лабораторной плазме [10], динамики флуктуаций плотности в лабораторной термоядерной плазме [11].

Аналитические методы хорошо развиты для задач стационарного нелокального переноса, таких, например, как теории переноса резонансного излучения при полном перераспределении по частоте в акте поглощения и излучения фотона атомом или ионом в газе или плазме [12–24]. Для задач нестационарного нелокального переноса с учетом конечной скорости движения переносчиков возбуждения среды до сих пор не было развито методов расчета функции Грина, описывающей пространственно-временное распределение возбуждения среды мгновенным точечным источником, и динамики эффективного фронта такого возбуждения. Без разработки аналитических методов описания таких характеристик невозможно (даже на суперкомпьютерах) решать

практически интересующие задачи интерпретации экспериментов. Это, в частности, относится к интерпретации экспериментальных данных по корреляционной рефлектометрии ЭМ волн турбулентной плазмы в токамаках, где удается собрать данные в течение всего разряда, а для парной корреляционной функции плотности плазмы до настоящего времени использовались только упрощенные статистические модели вместо формулировки и решения кинетических уравнений для флуктуаций плотности плазмы.

Цели и задачи

Общей целью работы является развитие и приложение к физике плазмы нового метода в теории нелокальных стохастических процессов - метода интерполируемой автомодельности. Задачи работы следующие.

1. Получить общие аналитические и численные решения задачи о функции Грина уравнения нестационарного нелокального переноса при конечной скорости переносчиков.

2. Выполнить обобщение и верификацию метода интерполируемой автомодельности, предложенного в [25], на случай конечной скорости переносчиков.

3. Провести объединенное описание «полетов Леви» и «прогулок Леви», найти критерий перехода между указанными режимами переноса.

4. Применить формализм супердиффузии для описания парной корреляционной функции плотности в турбулентной среде и к задаче восстановления нелокальных свойств турбулентности плазмы по рефлектометрическим измерениям спектра флуктуаций ее плотности.

Методы исследования

Ключевым аспектом работы является исследование уравнений супердиффузионного (нелокального) переноса, которые не сводятся к дифференциальным уравнениям диффузионного типа (сюда относятся процессы с доминированием механизмов переноса, широко известных как полеты Леви).

Для численных расчетов используются авторские программные коды. Все расчеты выполнены на языке программирования Python 3.7 с использованием дополнительных библиотек NumPy и SciPy, а также в системе Mathematica. Наиболее сложная часть расчетов выполнена на суперкомпьютере в НИЦ «Курчатовский институт».

Научная новизна

Новизна исследования состоит, прежде всего, в развитии нового метода в теории нелокальных стохастических процессов, основанного на получении приближенных автомодельных решений интегро-дифференциальных уравнений нестационарного нелокального переноса. Построение таких автомодельных решений позволяет значительно сокращать объем необходимых вычислений за счет уменьшения числа независимых переменных.

Принципиально новым является алгоритм получения приближенного автомодельного решения для функции Грина широкого класса интегро-дифференциальных уравнений нестационарного нелокального переноса. Это охватывает явления переноса с доминирующим вкладом переносчиков с большой длиной свободного пробега – «полетов Леви» или, в случае учета конечной скорости переносчиков, «прогулок Леви». В основе метода лежит интерполяция законов автомодельности для асимптотик далеко впереди и далеко позади эффективного фронта волны возбуждения. При таком подходе прямое решение задачи (численный расчет функции Грина) требуется лишь в относительно небольшой области переменных (вблизи фронта возбуждения).

Развиваемый метод обобщает недавно предложенный (и частично апробированный) подход для нелокального нестационарного переноса резонансного излучения в плазме на нелокальные стохастические процессы. Такие процессы требуют учета (а) конечной скорости переносчиков возбуждения среды (напр., конечной скорости электромагнитных (ЭМ) волн в космической плазме, в отличие от скорости света в лабораторной плазме); (б) стохастичности функций

источника и стока (т.е. рождения и поглощения средой) переносчиков возбуждения (напр., при распространении ЭМ волн в турбулентной плазме).

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость развитого метода интерполируемой автомодельности состоит в том, что получены приближенные аналитические решения указанного выше широкого класса интегро-дифференциальных уравнений.

Практическая значимость развитого метода интерполируемой автомодельности состоит в том, что построение приближенного автомодельного решения значительно сокращает численные расчеты для решения прямых и обратных задач нелокального нестационарного переноса. В частности, с ростом времени от момента действия источника возбуждения среды точность разработанного в диссертации метода для функции Грина повышается, а численных методов (типа метода Монте-Карло) понижается.

Полученное аналитическое описание спектральной и координатной зависимости кросс-корреляционной функции полоидальной и радиальной рефлектометрии плазмы в токамаках позволило решить обратную задачу восстановления параметров движущихся флуктуаций плотности плазмы, включая среднюю длину и дисперсию длин их свободного пробега, их среднюю скорость и дисперсию скоростей в токамаках T-10, TEXTOR и ASDEX-Upgrade.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Общие аналитические решения задачи о функции Грина широкого класса интегро-дифференциальных уравнений нестационарного нелокального (супердиффузионного) переноса (для случаев ядра интегрального оператора со степенным убыванием с ростом расстояния) при конечной скорости переносчиков и различной размерности пространства. Результаты численного расчета указанных решений в широком интервале пространственно-временных переменных, позволяющие определить структуру фронта возбуждения среды.

2. Обобщение метода интерполируемой автомодельности на случай конечной скорости переносчиков. Приближенные автомодельные решения указанного класса интегро-дифференциальных уравнений и доказательство высокой точности этих решений путем сравнения с точными численными расчетами в широкой области параметров.

3. Приближенное аналитическое описание фронта функции Грина нестационарного нелокального переноса типа «прогулок Леви» при произвольной скорости переносчиков. Объединенное приближенное аналитическое описание указанного фронта для переноса типа «полетов Леви» и «прогулок Леви».

4. Аналитическое описание вклада нелокального переноса флуктуаций плотности плазмы в кросс-корреляционную функцию сигналов рефлектометрии плазмы ЭМ волнами. Метод восстановления нелокальных свойств этих флуктуаций по экспериментальным данным на основе указанного аналитического описания и интерпретация экспериментальных данных для квазикогерентных колебаний при рефлектометрии плазмы в токамаках.

Личный вклад

Автор принял активное участие в (а) обобщении основных положений метода интерполируемой автомодельности и верификации метода, (б) разработке метода восстановления нелокальных свойств стохастических процессов и сравнении разработанной модели с экспериментально наблюдаемыми параметрами квазикогерентных колебаний при рефлектометрии плазмы ЭМ волнами в токамаках. Им проведены все аналитические и численные расчеты общих и приближенных автомодельных решений, законов подобия для фронта функции Грина нестационарного нелокального переноса типа «прогулок Леви», а также расчеты для метода восстановления нелокальных свойств стохастических процессов в среде.

Степень достоверности результатов

Эффективность метода интерполируемой автомодельности при конечной скорости переносчиков верифицирована путем сравнения приближенных

автомодельных решений с результатами прямого численного решения уравнений переноса, включая расчеты общих аналитических решений для функции Грина, проведенные диссертантом, и независимое численное моделирование функции Грина методом Монте-Карло, проведенное соавтором публикации (А.В. Соколовым). Применение разработанного метода восстановления нелокальных свойств стохастических процессов в среде по спектру флуктуаций ее плотности показало удовлетворительное согласие разработанной модели с экспериментально наблюдаемыми параметрами квазикогерентных колебаний при рефлектометрии плазмы ЭМ волнами в токамаках.

Апробация результатов работы

Основные результаты работы неоднократно докладывались и обсуждались на профильных научно-тематических семинарах «Теория магнитного удержания плазмы» Курчатовского комплекса термоядерной энергетики и плазменных технологий (ККТЭиПТ) в НИЦ «Курчатовский институт». Были сделаны доклады на следующих конференциях: Международные конференции европейского физического общества по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу (EPS-45, г. Прага, Чехия, 2018 г.; EPS-46, г. Милан, Италия, 2019 г.); IV Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии Лаплаз-2018», НИЯУ МИФИ; Всероссийские научные конференции МФТИ (61-ая, 2018 г.; 62-ая, 2019 г.; 63-я, 2020 г.); Международные (Звенигородские) конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу 2021 и 2021 гг. Также результаты работы представлялись на Курчатовских междисциплинарных молодежных научных школах 2014, 2017, 2019 гг.

Полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем

По результатам научно-квалификационной работы (диссертации) опубликовано 18 публикаций. Сюда входят 7 научных статей в рецензируемых

журналах, индексируемых в следующих базах данных: Web of Science – 5, Google Scholar – 1, SCOPUS – 6 (6 из 7 статей входят в список ВАК); 6 трудов конференций, включая 2 работы, индексируемые в базе данных SCOPUS; 5 тезисов докладов на конференциях и молодежных школах.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 4-х глав, заключения и списка цитируемой литературы. Работа содержит 167 страниц, включает 26 рисунков и 1 таблицу. Список цитированной литературы содержит 80 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описывается исследуемая в работе проблема, обосновывается актуальность и значимость темы исследования. Сформулированы цели и задачи диссертационной работы. Вводится понятие супердиффузионного переноса, полетов и прогулок Леви, а также показана важность роли такого переноса в широком круге явлений.

Первая глава посвящена обзору литературных данных по теме диссертации. Подробно обсуждается понятия автомодельности и супердиффузионного (нелокального) переноса. Описана постановка задачи супердиффузионного переноса. Обсуждается приближенное автомодельное решение уравнения Бибермана–Холстейна в случае переноса полетами Леви. Описан метод построения автомодельной функции Грина в случае 1D переноса полетами Леви. Обсуждается задача разработки теории диагностики нелокальных свойств флуктуаций плотности плазмы с помощью рефлектометрии плазмы электромагнитными волнами.

Вторая глава посвящена получению общего решения для функции Грина плотности возбуждения среды при переносе прогулками Леви [A2, A5]. Уравнение для функции Грина плотности возбуждения среды $f(\mathbf{r}, t)$ в точке \mathbf{r} в момент времени t имеет вид:

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\left(\frac{1}{\tau} + \sigma\right) f(\mathbf{r}, t) + \quad (1)$$

$$+\frac{1}{\tau} \int d\mathbf{r}_1 W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) \theta\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{c}\right) f\left(\mathbf{r}_1, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{c}\right) + \delta(\mathbf{r})\delta(t),$$

где $W(\rho)$ — вероятность поглощения переносчика возбуждения среды на расстоянии ρ от точки его последнего старта.

Условие нормировки вероятности имеет стандартный вид: $\int_0^\infty W(\rho)S(\rho)d\rho = 1$. Здесь $S(\rho)d\rho$ есть элемент объема в пространстве ($\rho \geq 0$): в одномерном случае $S(\rho) = 2$, в двумерном $S(\rho) = 2\pi\rho$ и в трехмерном $S(\rho) = 4\pi\rho^2$. При этом функция $W_{step}(\rho) \equiv W(\rho)S(\rho)$ есть функция распределения по длине свободного пробега (ФРСП) переносчиков возбуждения среды; τ — среднее время жизни неподвижного элементарного возбуждения среды; c — постоянная скорость движения переносчиков; σ — среднее обратное время исчезновения («тушения») элементарного возбуждения среды (для переноса резонансного излучения это относится к нерадиационному девозбуждению среды). В трехмерном случае, когда переносчиками возбуждения среды (а именно, возбуждения атомов или ионов) являются резонансные фотоны в среде, W и W_{step} имеют вид (ср., напр., раздел 1 в [17])

$$W(\rho) = -\frac{1}{4\pi\rho^2} \frac{dT(\rho)}{d\rho} \equiv \frac{1}{4\pi\rho^2} W_{step}(\rho), \quad T(\rho) = \int d\omega P_\omega \exp[-\kappa_\omega \rho], \quad (2)$$

где P_ω — спектральное распределение вероятности испускания фотона с частотой ω ; κ_ω — коэффициент поглощения средой фотона с частотой ω (т.е. обратная длина свободного пробега такого фотона).

Для реализации супердиффузионного переноса ФРСП должна быть медленно спадающей функцией расстояния ρ , т.е. степенной:

$$W_{step}(\rho) = \frac{\gamma\kappa_0}{(1 + \kappa_0\rho)^{\gamma+1}}, \quad T(\rho) = \frac{1}{(1 + \kappa_0\rho)^\gamma}, \quad 0 < \gamma < 2, \quad (3)$$

где $1/\kappa_0$ является характерной длиной, что в случае переноса возбуждения резонансными фотонами соответствует значению коэффициента поглощения в центре спектральной линии κ_0 . Для такого модельного вида ФРСП в случае разных размерностей координатного пространства было получено выражение для функции Грина плотности возбуждения среды $f(\mathbf{r}, t)$ [A1, A2, A4, A5].

Отметим, что нелокальный перенос прогулками Леви характеризуется двумя параметрами: степенью спада ФРСП (3) с расстоянием « γ » и безразмерным параметром запаздывания:

$$R_c = \sigma \kappa_0, \quad (4)$$

который равен отношению среднего времени жизни неподвижного возбужденного состояния среды к среднему времени свободного пролета переносчика возбуждения между точками исчезновения и появления неподвижного возбужденного состояния среды вследствие такого переноса.

Далее в главе получены общие решения уравнения (1) для 1D, 2D и 3D переноса [A2, A5], описываются методы и особенности численного расчета полученных решений. Также представлен способ улучшения сходимости численного расчета двойных интегралов с интегрируемой особой точкой. На рис. 1 показаны результаты расчета общих решений уравнения (1) в разные моменты времени для 3D размерности координатного пространства.

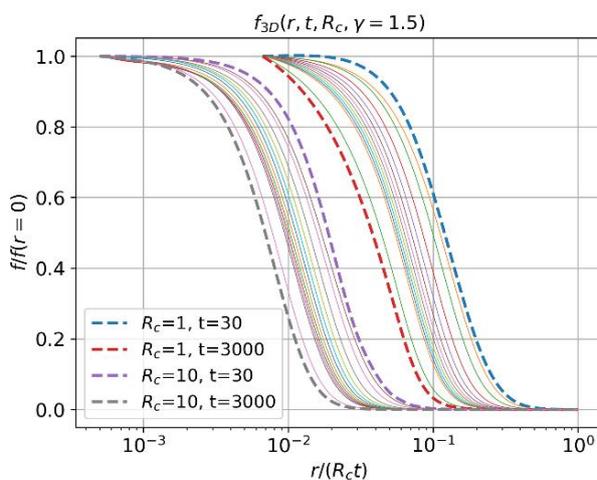


Рис. 1. Результаты численного расчета общих решений уравнения (1) для 3D переноса в разные моменты времени $t = 30 - 3000$ (крайние значения отмечены пунктирными кривыми) для разных размерностей пространства и различных значений параметров $R_c = 1; 10$ и $\gamma = 1,5$.

Третья глава посвящена методу интерполируемой автоточности для прогулок Леви. В данной главе получено выражение для асимптотики функции Грина уравнения нелокального переноса при конечной скорости переносчиков далеко впереди фронта [A1, A2] возбуждений и показано, что результат является универсальным для различных размерностей пространства [A2] (далее r и t в безразмерных переменных в единицах $1/\kappa_0$ и τ):

$$f(r \rightarrow R_c t - 0, t, R_c) = \left(t - \frac{r}{R_c}\right) W(r) \theta\left(t - \frac{r}{R_c}\right). \quad (5)$$

Отметим, что формальный предельный переход $R_c \rightarrow \infty$, который соответствует переходу от переноса прогулками Леви к переносу полетами Леви, согласуется с расчетом асимптотики в [25].

Дефиниция фронта $\rho_{fr}(t, R_c, \gamma)$ задается приравниванием асимптотики точного решения (5) вблизи баллистического конуса $r = R_c t$ к точному решению в начале координат:

$$\left(t - \frac{\rho_{fr}}{R_c}\right) W(\rho_{fr}) \theta\left(t - \frac{\rho_{fr}}{R_c}\right) = f(0, t, R_c, \gamma). \quad (6)$$

Асимптотика далеко позади фронта возбуждения соответствует пределу $r \rightarrow 0$. В отличие от полетов Леви для прогулок Леви в общем случае не удается получить выражение для данной асимптотики. Однако в частном случае $\gamma = 0,5$, который для переноса резонансного излучения соответствует случаю лоренцевской формы крыльев спектральной линии излучения, для асимптотики можно получить приближенное выражение [A2]. В 1D переносе, при больших значениях параметра запаздывания и еще больших значениях времени для функции Грина, можно получить $f(r \rightarrow 0, t \gg R_c \gg 1, \gamma = 0,5) = 0,0930/(R_c^{1/2} t^{3/2})$, что совпадает со скейлингом (19) в [26] и находит недостающий в нем численный коэффициент.

Следуя методу, изложенному в [25], построим приближенное автомодельное решение в виде [A1, A2]:

$$f_{auto}(r, t, R_c, \gamma) = \left(t - \frac{r}{R_c} g\left(\frac{\rho_{fr}(t, R_c, \gamma)}{r}\right)\right) \times \\ \times W\left(r g\left(\frac{\rho_{fr}(t, R_c, \gamma)}{r}\right)\right) \theta\left(t - \frac{r}{R_c} g\left(\frac{\rho_{fr}(t, R_c, \gamma)}{r}\right)\right), \quad (7)$$

где функция автомодельности g имеет следующие асимптотические пределы

$$g(s) = \begin{cases} 1, & s = s_{min} = \rho_{fr}(t, R_c, \gamma)/(R_c t), \\ s, & s \gg s_{min}. \end{cases} \quad (8)$$

Введем пробную функцию автомодельности $Q(r, t, R_c, \gamma)$:

$$\left(t - \frac{r}{R_c} Q\right) W(rQ) \theta\left(t - \frac{r}{R_c} Q\right) = f(r, t, R_c, \gamma). \quad (9)$$

Для проверки точности указанной автомодельности в диссертации показано, что функция $Q_1(s, t, R_c, \gamma)$ слабо зависит от времени [A1, A2]:

$$Q_1(s, t, R_c, \gamma) = Q(\rho_{fr}(t, R_c)/s, t, R_c, \gamma) \approx g(s, R_c, \gamma). \quad (10)$$

Таким образом, метод интерполируемой автомодельности при конечной скорости переносчиков состоит в следующем: а) расчет точного решения уравнения (1) в ограниченной области пространственно-временных переменных, что позволяет определить функцию автомодельности в области $s \sim 1$, где автомодельное решение (7) оказывается наиболее чувствительным к интерполяции между пределами больших и малых s ; б) анализ точности функции автомодельности (10); в) анализ точности автомодельного решения относительно точного решения.

Далее в данной главе показано, что для широкого диапазона параметров задачи с увеличением времени точность автомодельности растет [A2]. На рис. 2 представлена зависимость функции автомодельности от автомодельной переменной s для различных моментов времени (крайние значения отмечены пунктирными кривыми) в 3D случае. С ростом s отклонение точного решения от искомой автомодельности (7), (8) стремится к нулю.

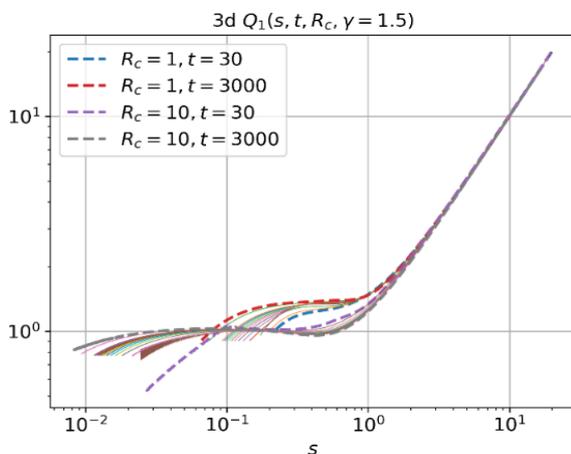


Рис. 2. Функция автомодельности при $R_c = 1; 10$ и $\gamma = 1,5$ для различных моментов времени (крайние значения отмечены пунктирными кривыми) в 3D случае.

Степень автомодельности характеризуется относительным отклонением функции автомодельности в крайние моменты времени $t = 30$ и $t = 3000$. Для представленной кривой на рис. 2 отклонение максимально при малом времени и составляет 5% для $R_c = 1$ и 35% для $R_c = 10$. По рассчитанной функции автомодельности в выбранный один момент времени на рис. 3 построены приближенные автомодельные решения для $R_c = 1, \gamma = 1,5$ в различные другие

моменты времени. Рассчитаны также точные решения, которыми называются численно рассчитанные общие аналитические решения [A1, A2, A5], которые здесь не приведены по причине их громоздкости (двукратные интегралы Фурье-Лаплас образов по координате и времени). Видно, что с увеличением времени точность автомодельного решения растет [A2].

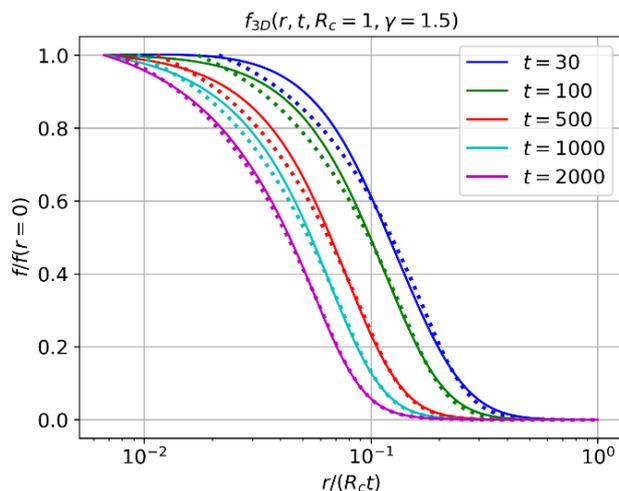


Рис. 3. Сравнение автомодельного решения (пунктирные кривые) для разных моментов времени t , построенного по функции автомодельности для наибольшего t , с точным решением (сплошные кривые) для 3D переноса и значений $R_c = 1$ и $\gamma = 1,5$.

Сравнение результатов для различных показателей степенного спада функции распределения по длине свободного пробега показывает, что для $\gamma = 1,5$ точность автомодельного решения заметно выше, чем для $\gamma = 0,5$. Для улучшения точности при $\gamma = 0,5$ требуется дополнительная работа по улучшению дефиниции эффективного фронта распространения возбуждения для функции Грина.

В **четвертой** главе рассматриваются законы подобия для фронта функции Грина нестационарного нелокального переноса при произвольной скорости переносчиков возбуждения среды. Введена дефиниция эффективного фронта распространения возбуждения в среде от точечного мгновенного источника в следующем виде:

$$r_{rest}(t) = \sqrt{M_{rest}(t)/N_{rest}(t)},$$

$$N_{rest}(t) = \int f_{rest}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad M_{rest}(t) = \int r^2 f_{rest}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (11)$$

Здесь $N_{rest}(t)$ является полным количеством неподвижных возбужденных частиц в среде в задаче переноса возбуждения в однородной среде. Отметим, что при принятом начальном условии $N_{rest}(0) = 1$ величина $N_{rest}(t)$ является отношением числа возбужденных частиц среды к числу первоначально возбужденных; $M_{rest}(t)$

— второй момент функции Грина. В [A3] получены аналитические выражения для (11) с использованием для функции Грина f_{rest} общих аналитических решений [A1, A2, A5]. Для фронта возбуждения среды r_{rest} в случае прогулок Леви, $r_w(t, R_c, \gamma)$ (w - walks), получаем следующее выражение:

$$r_w(t, R_c, \gamma) = \begin{cases} tR_c \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}, & 0 < \gamma \leq 1 - \varepsilon_{rest}^{(L)}(t, R_c), \\ \frac{tR_c}{\sqrt{2(R_c + \ln(tR_c))}}, & 1 - \varepsilon_{rest}^{(L)}(t, R_c) < \gamma \leq 1 + \varepsilon_{rest}^{(U)}(t, R_c), \\ (tR_c)^{\frac{3-\gamma}{2}} \left[\frac{\gamma(\gamma-1)}{(2-\gamma)(3-\gamma)} \frac{1}{1+R_c(\gamma-1)} \right]^{1/2}, & 1 + \varepsilon_{rest}^{(U)}(t, R_c) < \gamma < 2. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь при больших значениях R_c $\varepsilon_{rest}^{(U)}(t, R_c) \approx \varepsilon_{rest}^{(L)}(t, R_c) = \frac{1}{R_c + \ln(tR_c)}$. Видно, что в зависимости от степени спада ФРСП количество неподвижных возбуждений при больших временах стремится к нулю или постоянной величине.

Проведем объединение законов подобия фронта для полетов Леви и прогулок Леви. Для случая полетов Леви, которому соответствует условие $R_c = \infty$, дефиниция фронта $r_f(t)$ имеет следующий вид [25]: $r_f(t, \gamma) \approx t^{1/\gamma}$. Можно показать [A3], что для $0 < \gamma < 1$ выражения r_w и r_f являются пределами более общей формулы. Интегральная по объему характеристика относительного числа возбуждений среды описывается формулой $N(t, R_c, \gamma) \equiv \int f(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \sim \frac{R_c^\gamma}{t^{1-\gamma}} \leq 1$. Сначала, при $N \sim 1$, имеем перенос в режиме полетов Леви, а при $N \ll 1$ и накоплении эффекта запаздывания имеем выход на режим прогулок Леви. Представим закон фронта единой простой формулой:

$$r_{f+w}^{rest}(t, R_c, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{1/r_w^2(t, R_c, \gamma) + 1/r_f^2(t, \gamma)}}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1,5. \quad (13)$$

На рис. 4 для случая $\gamma = 0,5$ и $R_c = 100$ виден переход между двумя режимами переноса – полетами и прогулками Леви. При относительно малых временах доминируют полеты Леви (черный пиксир), а с увеличением времени имеем перенос в режиме прогулок Леви и требуется учет эффекта запаздывания. В момент перехода виден излом на кривой для динамики фронта (6) (на красной

непрерывной кривой), рассчитанной с использованием расчетов методом Монте-Карло значений точной функции Грина в начале координат.

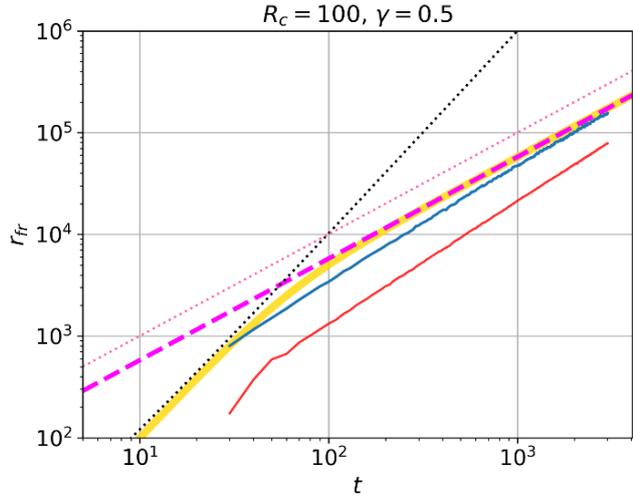


Рис. 4. Аналитический фронт для прогулок Леви (12) (сиреневая пунктирная кривая); фронт (11) (темно-синяя кривая) и (6) (красная кривая) для прогулок Леви, полученные из результатов расчета функции Грина методом Монте-Карло; фронт для полетов Леви (черная пунктирная кривая); аналитическое представление (13) обобщенного фронта (желтая кривая); баллистический фронт (красная пунктирная кривая).

Сравнение представлено для $R_c = 100$ и $\gamma = 0,5$.

Для плотности переносчиков возбуждения среды, дефинированной как

$$f_{mov}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d\omega \frac{\bar{I}_\omega(\mathbf{r}, t)}{\hbar\omega}, \quad (14)$$

проведены расчеты фронта, дефинированного аналогично (11).

В данной главе также получен критерий применимости прогулок Леви к вспышечным явлениям в астрофизике. При расчете спектра оптического линейчатого излучения, испускаемого водородным слоем, нагретым ударной волной от вспышки (типа солнечной) в красных карликах, в [27] используется приближение «прострельного выхода» (Escape Probability), справедливое только для стационарной задачи переноса излучения. При $0 < \gamma < 1$, когда нелокальные эффекты сильны, нами получен следующий критерий необходимости учета запаздывания в зависимости от времени после вспышки и размеров среды, в которой происходит перенос линейчатого излучения:

$$\frac{(t/\tau)^{1/\gamma-1}}{R_c} \sim \frac{(\kappa_0 r)^{1-\gamma}}{R_c} \geq 1. \quad (15)$$

Пятая глава посвящена разработке и применению теории корреляционной рефлектометрии плазмы ЭМ волнами для определения нелокальных свойств флуктуаций ее плотности. В основе развитого подхода лежит использование концепции прогулок Леви. Рождаемые вследствие сильных нелинейных

процессов локализованные возмущения плотности могут либо оставаться захваченными средой (стоящие возбуждения среды) и почти не двигаться относительно нее, либо (как локализованные нелинейные волны типа солитон) двигаться с постоянной скоростью до остановки в среде (акта «поглощения» бегущей флуктуации плотности средой и превращения ее в стоящую). Закон движения бегущих флуктуаций плотности определяется дисперсионными свойствами нелинейных волн в среде и предполагает наличие некоторого распределения по скоростям. Флуктуации плотности плазмы можно рассматривать как локализованные возбуждения квазистационарной среды и применить к ним формализм модели Бибермана—Холстейна с учётом конечной скорости переносчиков возбуждения. При этом стохастические свойства процессов рождения и уничтожения, свободного пробега в среде и остановки в виде элементарного возбуждения среды мы будем характеризовать феноменологически вводимыми спектральными вероятностями. Основные параметры этих распределений вероятности подлежат восстановлению путём решения обратной задачи при интерпретации результатов измерений спектров рассеяния диагностического излучения и спектральных и пространственных характеристик корреляционной рефлектометрии.

Получено выражение для вклада j -ой флуктуации m -ого сорта, имеющей скорость v_j , в Фурье-Лаплас-образ числа флуктуаций плотности среды в единице объема [A7]:

$$\hat{g}_m(\mathbf{K}, \omega, v_j) = \frac{1}{4\pi} Q_{eff}^{(m)}(\mathbf{K}, i\omega, v_j) \int_0^{+\infty} dt e^{-i(\omega - (v_j, \mathbf{K}))t} T_m(v_j t, v_j), \quad (16)$$

куда входит Фурье-образ функции Холстейна $T_m(v_j t, v_j)$ с учетом доплеровского сдвига частоты в акте рассеяния зондирующего излучения бегущей флуктуацией; $Q_{eff}^{(m)}(\mathbf{K}, i\omega, v_j) = \frac{Q_m(\mathbf{K}, i\omega)}{1 + \sigma_m \tau_m + i\omega \tau_m - Y_m(\mathbf{K}, i\omega, v_j)}$ есть эффективный источник стоящих флуктуаций сорта m , где $Q_m(\mathbf{K}, i\omega)$ – Фурье-Лаплас-образ функции источника

стоящих флуктуаций сорта m , см. $q(\mathbf{r}, t)$ в (1); $Y_m(K, i\omega, v) = \frac{\gamma\kappa_0(v)}{K} \int_0^{+\infty} \frac{dt_1 e^{-st_1}}{(1+vt_1\kappa_0(v))^{\gamma+1}} \frac{\sin(vKt_1)}{t_1}$.

В рамках пертурбативного учета влияния остановки («захвата» средой) флуктуаций плотности на неупругое рассеяние ЭМ волны бегущей флуктуацией плотности плазмы для спектра излучения, неколлективно рассеянного ансамблем флуктуаций m -ого сорта со скоростью v , получаем [A7] ($\omega = \omega_s - \omega_i$, волновой вектор рассеяния $\mathbf{K} = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$, где индекс « s » означает рассеянную волну; « i » - падающую):

$$\begin{aligned} & \frac{dW_m(\omega, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{v}, \mathbf{r}_1, t)}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} d\omega_s} \\ &= \frac{cr_0^2}{\pi(4\pi)^3} [\hat{\mathbf{n}}, [\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{E}_0]]^2 \left| Q_{eff}^{(m)}(\mathbf{K}, i\omega, \mathbf{v}) \right|^2 \left| \int_0^{+\infty} dt e^{-i(\omega-(v, \mathbf{K})t)} T_m(vt, \mathbf{v}) \right|, \end{aligned} \quad (17)$$

где r_0 соответствует длине, определяющей сечение рассеяния ЭМ волны индивидуальной флуктуацией; $\hat{\mathbf{n}}$ – единичный вектор в направлении распространения рассеянной волны с амплитудой \mathbf{E}_0 .

При зондировании пространственного (по малому радиусу) профиля плотности тороидальной осесимметричной плазмы длина волны инжектируемого ЭМ-поля выбирается из условия упругого отражения зондирующего излучения от области плотной замагниченной плазмы. Смещение же частоты излучения при рассеянии определяется прежде всего доплеровским сдвигом из-за рассеяния волны на бегущих флуктуациях плотности. Этот эффект по сути совпадает с образованием структуры типа дублета Мандельштама-Бриллюэна [28] в спектре рассеяния света на звуковых волнах в упругих средах. Кроме этого, возникает уширение спектра вследствие конечного времени жизни бегущей флуктуации плотности. Доплеровский сдвиг определяется вектором рассеяния, для модуля которого имеем [28]:

$$K = 2n \frac{\omega_i}{c} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (18)$$

где n – коэффициент преломления среды, θ – угол между рассеянной волной и падающей. В радиальной и полоидальной рефлектометрии флуктуаций плотности

плазмы в токамаках инжектируют и принимают отраженный сигнал примерно перпендикулярно магнитным поверхностям, чтобы вектор рассеяния \mathbf{K} в (18) был направлен строго по малому радиусу тороидального плазменного шнура (см., напр., рис. 1-3 в [29]).

Для бегущих флуктуаций будем использовать распределение по вектору скорости, имеющее гауссовский вид:

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0, \alpha) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha v_0} \right)^3 \exp\left(-\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{pl})^2}{2(\alpha v_0)^2} \right), \quad (19)$$

где \mathbf{v}_{pl} — средняя массовая (т.е. гидродинамическая) скорость плазмы в лабораторной системе отсчета (т.е. относительно измерительной аппаратуры); \mathbf{v}_0 — средняя скорость флуктуаций в системе покоя плазмы.

Если в плазме имеется несколько сортов переносчиков с заданными функциями распределения по скоростям движения $h_m(\mathbf{v})$ и заданным относительным количеством A_m , то спектр рассеяния содержит сумму по сортам флуктуаций и усреднение по скоростям для m -ого сорта:

$$\frac{dW(\omega, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_1, t)}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} d\omega_s} = \sum_m A_m \int d\mathbf{v} h_m(\mathbf{v}) \frac{dW_m(\omega, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_1, t, \mathbf{v})}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} d\omega_s}. \quad (20)$$

В рассматриваемом нами случае неколлективного (некогерентного [30]) рассеяния интерференция вкладов флуктуаций разного сорта отсутствует. Будем учитывать только те движения, которые соответствуют переходу флуктуации плотности из одной наблюдаемой точки в другую путем свободного движения с постоянной скоростью: $\mathbf{v}_j^{(r_{12})} = \left| \mathbf{v}_j^{(r_{12})} \right| \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$. Время запаздывания регистрируемого сигнала для рефлектометрии определяется выражением:

$$\Delta t_{12}^{(j)} = \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{v}_{pl} + \mathbf{v}_j^{(r_{12})}|}. \quad (21)$$

В случае полоидальной корреляционной рефлектометрии, когда вектор рассеяния направлен по малому радиусу тороидального плазменного шнура, при большой скорости полоидального вращения в (21) нужно учесть скорость

гидродинамического вращения плазмы v_{pl} , а для радиальной корреляционной рефлектометрии зависимость от этой скорости выпадает.

Тогда конечный результат для спектра кросс-корреляционной функции для одного сорта рассеивателей, когда можно положить $K_1 = K_2 = K$, а вектор рассеяния имеет только радиальный компонент K_r , имеет вид [А6, А7]:

$$C(\omega, \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1) = e^{i(K,r)} \frac{\langle T(|v_r| \Delta t_{12}, |v_r|) \exp[i(\omega - K_r v_r) \Delta t_{12}] |g(\mathbf{r}_2, K_r, \omega, v_r)| \rangle}{\{ |g(\mathbf{r}_1, K_r, \omega, v_r)| |g(\mathbf{r}_2, K_r, \omega, v_r)| \}^{1/2}}, \quad (22)$$

где угловые скобки означают усреднение по скоростям рассеивателей.

Видно, что результат в явном виде зависит от функции Холстейна, описывающей нелокальность процесса переноса. Её отклонение от экспоненциальной зависимости, а именно степенной спад с ростом расстояния, приводит к медленному (в частности, отличному от гауссовского) спаду парных корреляций плотности с ростом расстояния.

В данной главе далее сформулирована обратная задача восстановления параметров нелокальности переноса флуктуаций плотности. Предложенный алгоритм применен к интерпретации результатов измерений на токамаках T-10, TEXTOR и ASDEX-Upgrade [А7]. Здесь для примера представлены результаты для токамака T-10 [А6]. Результаты решения обратной задачи и сравнение экспериментальных и теоретических кривых представлены на рис. 5-7.

Входной параметр обратной задачи $K = 16.3$ (1/см) задан геометрией диагностики. Как результат решения обратной задачи ниже представлены оптимальные значения следующих параметров: средние значения продольной $v_{0,\parallel}$ и поперечной $v_{0,\perp}$, (по отношению к вектору рассеяния) скорости бегущих флуктуаций плотности: $v_{0,\parallel} = v_{0,\perp} = 4,2 \times 10^4$ (см/с); относительные вклады компонент спектра: $A_{left} = 0,01$; $A_{right} = 0,013$; $A_{centr} = 0,01$; ширина распределения скорости боковых компонент $\alpha = 0,458$; «тепловая» ширина центральной компоненты: $v_T = 10^4$ (см/с); для боковых компонент коэффициент поглощения зависит от скорости: $\kappa_0(\mathbf{v}) = \kappa_{0,res} \exp((\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 / (\beta \mathbf{v}_0)^2)$, $\kappa_{0,res} = 0,3$ (1/см), $\beta = 1$;

коэффициент поглощения для центральной компоненты: $\kappa_{0,centr} = 10$ (1/см);
 степень нелокальности: $\gamma = 0,55$.

На рис. 5 видно, что боковые компоненты спектра рассеяния (при частоте $\omega/(2\pi) \approx \pm 110$ кГц), впервые обнаруженные на токамаке T-10 и получившие название квазикогерентных колебаний (Quasi-Coherent Mode) [31, 32], можно интерпретировать как аналог дублета Мандельштама – Бриллюэна при рассеянии света в упругой среде [А6].

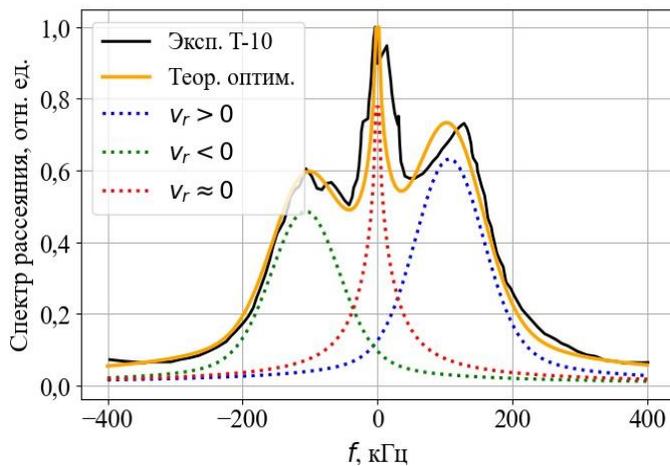


Рис. 5. Спектр излучения, рассеянного бегущими и почти стоящими флуктуациями плотности: экспериментальный спектр с рис. 4а [29] (черная кривая), результат наилучшей подгонки этого спектра (оранжевая кривая), рассчитанный по (17) и (20). Пунктиром показаны отдельные компоненты спектра.

Результаты решения обратной задачи для кросс-корреляционной функции для задачи рефлектометрии на токамаке T-10 [29] показаны на рис. 6 (спектральное распределение при одинаковой радиальной координате и различных полоидальных координатах двух точек с расстоянием между ними 1 см) и рис. 7 (зависимость от радиального расстояния между двумя точками при одинаковой полоидальной координате и различных частотах рассеяния).

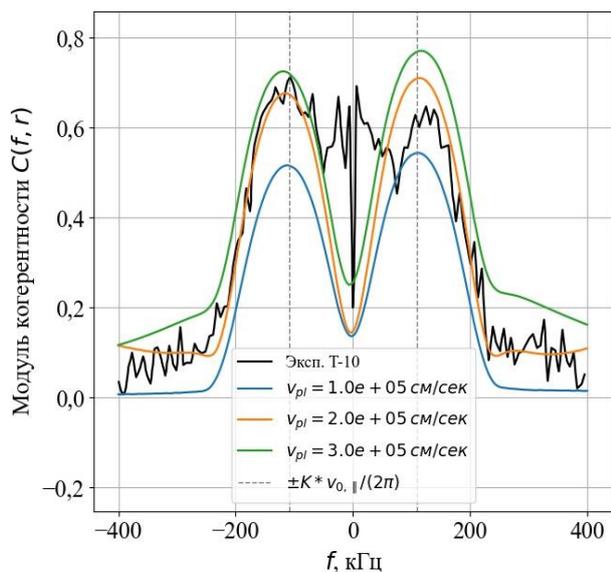


Рис. 6. Сравнение расчетов корреляционной функции (22) без учета множителя $\exp(iK\mathbf{r})$ с найденными оптимальными значениями для подгонки экспериментальных данных для спектра рассеяния и координатной зависимости корреляционной функции (результаты подгонки показаны на рис. 5). Показаны результаты модуля когерентности как функции частоты для трех различных значений полоидальной скорости вращения плазмы. Черная кривая – экспериментальная ((а) рис. 4b и (б) рис. 4с в [29]).

Сравнение теоретических и экспериментальных корреляционных функций как функций радиального расстояния между двумя точками показано на рис. 7. При этом результаты на рис. 7(а) показывают сравнение теоретических кривых для разных значений параметра нелокальности, γ , для иллюстрации чувствительности результата оптимизации к этому параметру.

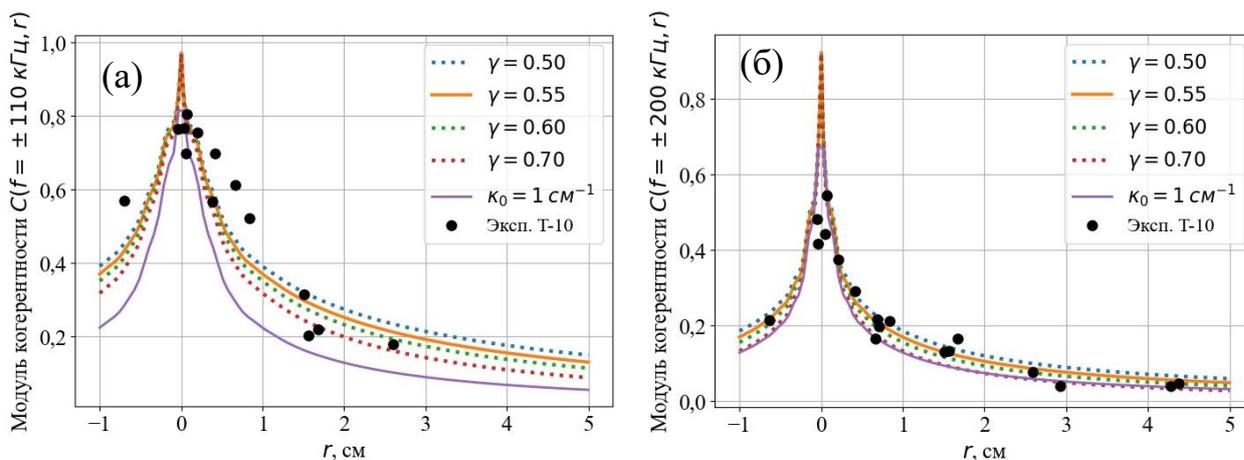


Рис. 7. Координатная зависимость модуля когерентности (22) для частоты (а) $f = \pm 110$ кГц, (б) $f = \pm 200$ кГц при различных значениях параметра γ : $\gamma = 0,5$ (синий пунктир); $\gamma = 0,55$ (оранжевая кривая); $\gamma = 0,6$ (зеленый пунктир); $\gamma = 0,7$ (красный пунктир). Фиолетовая кривая на рисунках «а» и «б» рассчитана при $\kappa_0 = 1$ (1/см) и $\gamma = 0,55$ в функции Холстейна (2)-(3); для остальных кривых коэффициент поглощения зависит от скорости согласно $\kappa_0(v) = \kappa_{0,res} \exp((v - v_0)^2 / (\beta v_0)^2)$. Черные точки – экспериментальные значения («а» из рис. 5а в [29] и «б» из рис. 5b в [29]).

Сравнение полученных нами результатов [А6] с результатами теоретической модели [29] (рис. 13 в [29]) показывает, что из-за монохроматичности распределения по скоростям в той модели совпадение рассчитанной там кросс-фазы с экспериментом существенно лучше, чем в нашей модели. Однако по этой же причине совпадение спектров рассеяния в модели [29] хуже, так как в ней спектральные пики квазикогерентных компонент более острые.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена развитию и применению теории нелокального переноса энергии электромагнитными волнами в плазме.

– В работе получены общие аналитические решения задачи о функции Грина широкого класса интегро-дифференциальных уравнений нестационарного нелокального (супердиффузионного) переноса (для случаев ядра интегрального оператора со степенным убыванием с ростом расстояния) при конечной скорости переносчиков и различной размерности координатного пространства [А2, А5]. Результаты численного расчета указанных решений в широком интервале пространственно-временных переменных позволили определить структуру волнового фронта [А2].

– Метод интерполируемой автомодельности обобщен на случай конечной скорости переносчиков [А1]. Получены выражения для асимптотики функции Грина уравнения нелокального переноса при конечной скорости переносчиков далеко впереди и позади фронта возбуждений [А2]. Сравнение приближенных автомодельных решений указанного класса интегро-дифференциальных уравнений с точными численными расчетами в широкой области параметров показало высокую точность автомодельных решений [А1, А2, А4]. Показано, что с увеличением времени от момента действия мгновенного точечного источника точность автомодельного решения растет.

– Получено приближенное аналитическое описание фронта возбуждения среды в задаче о функции Грина нестационарного нелокального переноса типа

«прогулок Леви» при произвольной скорости переносчиков [A3]. Проведено объединение приближенного аналитического описания указанного фронта для переноса типа «полетов Леви» и «прогулок Леви» [A3]. Получены критерии перехода между указанными режимами переноса. Найден критерий применимости прогулок Леви к вспышечным явлениям в астрофизике. Рассмотрены разные модели описания фронта возбуждения среды, проведено их сравнение [A3].

– Формализм супердиффузии применен для описания кинетики движущихся флуктуаций плотности турбулентной среды и формулировки алгоритма восстановления нелокальных свойств стохастических процессов в среде по спектру флуктуаций ее плотности, диагностируемого по спектрам рассеяния ЭМ волн в среде [A7]. Данный подход позволяет определить эти свойства по спектрам рассеяния ЭМ волн и кросс-корреляционной рефлектометрии.

– Эффективность предлагаемого метода показана на примере интерпретации данных радиальной и полоидальной корреляционной рефлектометрии ЭМ волн радиочастотного диапазона для диагностики турбулентной плазмы в осесимметричных тороидальных установках магнитного удержания термоядерной плазмы – токамаках T-10 [A6], TEXTOR и ASDEX-Upgrade [A7]. Показано, что нелокальность пространственных корреляций флуктуаций плотности плазмы обусловлена длиннопробежными флуктуациями плотности, для которых функция распределения по длине свободного пробега существенно отличается от гауссовского вида и описывается распределением Леви. Получено универсальное описание связи наблюдаемой в токамаках квазикогерентной компоненты в спектре рассеянных ЭМ волн в плазме с процессом типа рассеяния Мандельштамма-Бриллюэна [A7].

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю А.Б. Кукушкину и следующим коллегам: В.С. Неверову – за полезные советы по ускорению

численного расчета общего решения и сотрудничество в работе [A4]; А.В. Соколову – за сотрудничество в работах [A3, A4] (численный расчет статистики траекторий переносчиков методом Монте-Карло); П.А. Сдвиженскому – за сотрудничество в работе [A4]; К.В. Чукбару – за обсуждение работы [26]; В.А. Вершкову и Д.А. Шелухину – за подробное обсуждение работ по рефлектометрии плазмы в токамаках [29], [31]; В.С. Лисице – за полезные обсуждения и поддержку.

Часть работы выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов 19-32-90281, 18-07-01269-а, 15-07-07850-а.

Работа выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», <http://ckp.nrcki.ru/>.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

Статьи в реферируемых журналах

- A1. Kukushkin A.B., **Kulichenko A.A.** Automodel solutions for superdiffusive transport by Lévy walks // *Phys. Scripta*. – 2019. – V. 94. – P. 115009 (13 pages), (WoS).
- A2. **Куличенко А.А.**, А.Б. Кукушкин Супердиффузионный перенос «прогулками Леви» в однородной среде: общее и приближенное автомодельное решения // *ЖЭТФ*. – 2020. – Т. 157. – №. 6. – С. 1036-1050, (WoS).
- A3. Кукушкин А.Б., **Куличенко А.А.**, Соколов А.В. Законы подобия для функции Грина нестационарного супердиффузионного переноса: прогулки Леви и полеты Леви // *ЖЭТФ*. – 2021. – Т. 159. – №. 5. – С. 978-996, (WoS).
- A4. Kukushkin A.B., **Kulichenko A.A.**, Neverov V.S., Sdvizhenskii P.A., Sokolov A.V., Voloshinov V.V. Self-Similar Solutions in the Theory of Nonstationary Radiative Transfer in Spectral Lines in Plasmas and Gases // *Symmetry*. – 2021. – V. 13. – №. 3. – P. 394 (32 pages), (WoS).
- A5. **Kulichenko A.A.**, Kukushkin A.B. Superdiffusive transport of Biberman-Holstein type for a finite velocity of carriers: general solution and the problem of automodel solutions // *Int. Rev. of Atom. and Molec. Phys. (IRAMP)*. – 2017. – V. 8(1). – P. 5-14, (Google Scholar).
- A6. Кукушкин А.Б., **Куличенко А.А.** Восстановление нелокальных характеристик флуктуаций плотности плазмы токамака по корреляционной рефлектометрии // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез*. – 2022. – Т. 45. – Вып. 2. – С. 105-122, (SCOPUS).

- A7. Kukushkin A.B., **Kulichenko A.A.** New approach to cross-correlation reflectometry diagnostics of nonlocality of plasma turbulence // *Symmetry*. – 2022. – V. 14. – №. 6. – P. 1265 (32 pages), (WoS).

Труды конференций

- A8. **Kulichenko A.A.**, Kukushkin A.B. Automodel solutions for nonlocal transport by Lévy walks in plasmas. – 46th EPS Conference on Plasma Phys. – Europhysics Conference Abstracts. – V. 43C. – P. 2.4013. – Milan, Italy. – 2019.
- A9. **Kulichenko A.A.**, Kukushkin A.B. Superdiffusive transport in plasma for a finite velocity of carriers: general solution and the problem of automodel solution. – 45th EPS Conference on Plasma Phys., Europhysics Conference Abstracts. – ECA. – V. 42A. – P. 1.4013. – Prague, Czech Republic. – 2018.
- A10. **Куличенко А.А.**, Кукушкин А.Б. Супердиффузионный перенос для конечной скорости переносчиков: общее решение и проблемы автомодельных решений. – IV Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии Лаплаз-2018». – С. 298-299. – Москва, Россия. – 2018.
- A11. Кукушкин А.Б., **Куличенко А.А.**, Соколов А.В. Единый закон подобия для супердиффузионного переноса полётами и прогулками Леви. – 63-ая Всероссийская научная конференция МФТИ. – С. 74-76. – Москва, Россия. – 2020.
- A12. Кукушкин А.Б., **Куличенко А.А.**, Соколов А.В. Алгоритм оптимизационной идентификации процессов супердиффузии в физике и биологии. – 62-ая Всероссийская научная конференция МФТИ. – С. 68-70. – Москва, Россия. – 2019.
- A13. **Куличенко А.А.**, Кукушкин А.Б. Супердиффузионный перенос для конечной скорости переносчиков: общее решение и проблема автомодельных решений. – 61-ая Всероссийская научная конференция МФТИ. – С. 68-70. – Москва, Россия. – 2018.

Тезисы докладов на конференциях и молодежных школах

- A14. Кукушкин А.Б., **Куличенко А.А.** Метод восстановления нелокальных характеристик флуктуаций плотности плазмы токамака по корреляционной рефлектометрии, XLIX Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и УТС. – С. 76. – Москва, Россия. – 2022.
- A15. **Куличенко А.А.**, Кукушкин А.Б. Алгоритм восстановления нелокальных характеристик турбулентности плазмы токамака по рефлектометрии, XLVIII Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и УТС. – С. 210. – Москва, Россия. – 2021.
- A16. **Куличенко А.А.**, Кукушкин А.Б. Автомодельные решения задачи переноса резонансного излучения в плазме с учетом конечности скорости света, 16-ая Курчатовская молодежная научная школа. – С. 152. – Москва, Россия. – 2019.

A17. **Куличенко А.А.**, Кукушкин А.Б., Сдвиженский П.А. Законы подобия для переноса резонансного излучения в плазме с учетом конечности скорости света, 15-ая Курчатовская молодежная научная школа. – С. 216. – Москва, Россия. – 2017.

A18. **Куличенко А.А.**, Кукушкин А.Б. Роль полетов Леви в нелокальности переноса излучения в плазме в модели Бибермана-Холстейна, 12-ая Курчатовская молодежная научная школа. – С. 162. – Москва, Россия. – 2014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. – New York: Freeman. – 1982.
2. Shlesinger M., Zaslavsky G.M., Frisch U. (ed) *Lévy Flights and Related Topics in Physics*. – New York: Springer. – 1995.
3. Dubkov A.A., Spagnolo B., Uchaikin V.V. Lévy flight superdiffusion: an introduction // *Int. J. Bifurcation Chaos*. – 2008. – Vol. 18. – P. 2649.
4. Klafter J., Sokolov I.M. Anomalous diffusion spreads its wings // *Physics World*. – 2005. – V. 18. – P. 29.
5. Eliazar I.I., Shlesinger M.F. Fractional motions // *Phys. Rep.* – 2013. – Vol. 527. – P. 101-129.
6. Иванов В.В. Перенос излучения и спектры небесных тел. – Москва: Наука. – 1969.
7. Минин И.Н. Теория переноса излучения в атмосферах планет. – Москва: Наука. – 1988.
8. Grinin V.P., Harutyunian H., Il'in V.B., Kholtygin A.F., et al. Radiation mechanisms of astrophysical objects: classics today // *Proc. of the conf. in honor of the 100th birthday of Academician V.V. Sobolev*. – St. Petersburg. – Erevan: Edit Print. – 2015. – P. 435.
9. Zaburdaev V., Denisov S., Klafter J. Lévy walks // *Rev. Mod. Phys.* – 2015. – Vol. 87. – P. 483.
10. Kukushkin A.B., Lisitsa V.S., Saveliev Yu.A. Nonlocal transport of thermal perturbations in a plasma // *JETP Lett.* – 1987. – Vol. 46. – P. 448.
11. Korolev V.Yu., Skvortsova N.N. *Stochastic Models of Structural Plasma Turbulence*. – Berlin, Boston: De Gruyter. – 2012.
12. Биберман Л.М. К теории диффузии резонансного излучения // *ЖЭТФ*. – 1947. – Т. 17. – С. 416.
13. Holstein T. Imprisonment of Resonance Radiation in Gases // *Phys. Rev.* – 1947. – Vol. 72. – P. 1212.
14. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. – Наука: Москва. – 1982.
15. Векленко Б.А. О функции Грина уравнения диффузии резонансного излучения // *ЖЭТФ*. – 1959. – Т. 36. – С. 204.
16. Kogan V.I. *A Survey of Phenomena in Ionized Gases* // *Proc. ICPIG'67*. – Vienna: IAEA. – 1968. – P. 583.

17. Абрамов В.А., Коган В.И., Лисица В.С. Перенос излучения в плазме. Вопросы теории плазмы. – Москва: Энергоатомиздат (под ред. Леонтовича М.А. и Кадомцева Б.Б.). – 1982. – Вып. 12. – С. 114.
18. Коган В.И., Запирание излучения в плазме. Энциклопедия низкотемпературной плазмы (под ред. Фортова В.Е.). – Москва: Наука. – 2000. – Т. 1. – С. 481.
19. Biberman L.M. Approximate method of describing the diffusion of resonance radiation // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. – 1948. – Vol. 49. – P. 659.
20. Kalkofen W. (ed) *Methods in Radiative Transfer*. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1984.
21. Rybicki G.V. Escape Probability Methods. In *Methods in Radiative Transfer* (ed W. Kalkofen). – Cambridge: Cambridge University Press. – 1984. – P. 21-64.
22. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Лагарьков А.Н. Перенос излучения в ионизационном континууме // *Оптика и спектроскопия*. – 1965. – Т. 19. – С. 326.
23. Напартович А.П. О методе $\tau_{\text{эф}}$ в теории переноса излучения // *Теплофизика высоких температур*. – 1971. – Т. 9. – С. 26–29.
24. Старостин А.Н. Перенос резонансного излучения. Энциклопедия низкотемпературной плазмы, под ред. В.Е. Фортова. – Москва: Наука. – 2000. – Т. 1. – С. 471.
25. Kukushkin A.B., Sdvizhenskii P.A. Automodel solutions for Lévy flight-based transport on a uniform background // *J. Phys. A: Math. Theor.* – 2016. – Vol. 49. – P. 255002.
26. Забурдаев В.Ю., Чукбар К.В. Ускоренная супердиффузия и конечная скорость полетов Леви // *ЖЭТФ*. – 2002. – Т. 121. – Вып. 2. – С. 299-307.
27. Morchenko E., Bychkov K., Livshits M. Continuum and line emission of flares on red dwarf stars // *Astrophys Space Sci.* – 2015. – Vol. 357. – P. 119.
28. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – Москва: Физматлит. – 2005.
29. Urazbaev A.O., Vershkov V.A., Soldatov S.V. et al. Investigation of the Possibility of Using Correlation Reflectometry to Determine the Parameters of Small-Scale Turbulence in the Core of a Tokamak Plasma // *Plasma Physics Reports*. – 2006. – Vol. 32. – № 6. – P. 443-460.
30. Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме. – Москва: Мир. – 1971.
31. Vershkov V.A., Soldatov S.V., Dreval V.V. A three wave heterodyne correlation reflectometer developed in the T-10 tokamak // *Rev. Sci. Instrum.* – 1999. – Vol. 70. – P. 1700.
32. Osipenko M.B. et al. Transport and turbulence studies in the T-10 tokamak // *Nucl. Fusion*. – 2003. – Vol. 43. – P. 1641.