

ОГОРОДНИКОВ ЛЕОН ЛЕОНТЬЕВИЧ

**КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА КОГЕРЕНТНЫХ
ВИХРЕВЫХ И ВОЛНОВЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

Специальность 1.3.14. — «Теплофизика и теоретическая теплотехника»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в федеральном государственном высшем учебном заведении
“Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»”

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук
Вергелес Сергей Сергеевич

Официальные оппоненты: **Иванов Иван Иванович**
Доктор физико-математических наук,
ФИЦ ПХФ и МХ РАН
профессор

Иванов Иван Иванович
XXX физико-математических наук,
XXX XXX XXX XXX
XXXXXXXXXXXX

Ведущая организация: ИФТТ РАН

Защита состоится XX XXXX 2023 г. в XX часов на заседании диссертационного
совета Д002.110.02 на базе Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Объединенный институт высоких температур Российской академии наук
по адресу: 125412, Москва, улица Ижорская, дом 13, строение 2

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке XXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXXX XXXXXXX или на сайте диссертацион-
ного совета <http://www.XXXXXXXXXX/ru/dissertation-council/>.

Автореферат разослан «XX» XXXXXXXXXXXX 2023 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета

Д 002.110.02, к. физ.-мат. наук

Тимофеев Алексей Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В большинстве природных явлений и технологических процессов движение жидкости и газа характеризуется большими числами Рейнольдса и потому не является стационарным. Даже если предположить, что в данный момент такое течение является ламинарным, то в случае превышения числом Рейнольдса Re некоторого порогового значения Re_{cr} , называемое критическим, амплитуда присущих потоку флуктуаций будет расти со временем, и течение перейдет в неустойчивый, или турбулентный, режим [1]. Для каждой геометрии течения существует свое Re_{cr} , которое, как правило, составляет величину $Re_{cr} \gtrsim 1 \div 10$.

Поэтому хаотические течения следует описывать в рамках статистического подхода. А.Н. Колмогоров создал первую теорию для статистически изотропного трехмерного развитого турбулентного потока [2]. Им приведены убедительные аргументы в пользу того, что статистический режим мелкомасштабных пульсаций при больших числах Рейнольдса универсален и не зависит от глобальной геометрии потока. В теории Колмогорова устанавливаются законы подобия, исходя из утверждения о существовании прямого каскада энергии и локальном взаимодействии по масштабам внутри инерционного интервала. Прямой каскад энергии подразумевает, что большие вихри распадаются на более мелкие и так далее, т.е. энергия переходит от больших масштабов к малым. Локальность взаимодействия по масштабам означает, что в процессе дробления участвуют вихри только близких размеров. Турбулентное двумерное течение значительно отличается от трёхмерного, поскольку в нём есть вторая сохраняющаяся квадратичная по скорости величина в пределе малой вязкости — энстрофия — помимо кинетической энергии. Вследствие этого в двумерном турбулентном течении устанавливаются два каскада [3] — обратный каскад энергии, в результате чего из более мелких вихрей образуются более крупные, и прямой каскад энстрофии, в результате которого завихренность передаётся на мелкие масштабы.

В случае ограниченной геометрии обратный каскад накапливает кинетическую энергию на самом большом из доступных масштабов. Вследствие это-

го возникает конденсат, который чаще всего оказывается вихрем или системой вихрей, что было предсказано в теоретической работе [4], а также обнаружено в численных и натуральных экспериментах [5, 6]. Такие статистически устойчивые крупномасштабные структуры, существующие на фоне быстрых флуктуаций, называют когерентными вихрями [5]. И.В. Колоколов и В.В. Лебедев создали аналитическую теорию для двумерного когерентного вихря [7], описывающую как интенсивное среднее течение вихрей, так и флуктуации на его фоне, которые представляют собой хаотическое во времени и пространстве изменение скорости. Ключевым отличием этой теории от теории изотропной турбулентности является утверждение о нелокальности взаимодействия по масштабам, так что нелинейное влияние неоднородности конденсата на мелкие турбулентные пульсации сильнее, чем нелинейное взаимодействие этих пульсаций между собой. Это приближение оправдывается, в частности, и существенно более крутым спектром энергии $E(k) \propto k^{-3}$ в присутствии конденсата [8] по сравнению со спектром для изотропной турбулентности $E(k) \propto k^{-5/3}$. Теория объясняет результаты численных [9] и лабораторных [10, 11] экспериментов по формированию устойчивых когерентных вихрей, связав их характеристики со статистическими свойствами хаотических флуктуаций течения.

Двумерное течение является моделью, применимая для трехмерного течения с подавленной третьей (мы её также будем называть вертикальной) компонентой скорости. Это может происходить по геометрическим причинам, когда жидкость представляет собой тонкий слой. Такие течения можно назвать квази-двумерными. Натурные эксперименты по двумерной турбулентности как раз производятся на тонких жидких слоях [6, 10, 11]. Подавление вертикальной компоненты скорости и однородность скорости вдоль вертикальной оси могут быть достигнуты также и быстрым вращением жидкости как целого вокруг этой оси согласно теореме Прудмана-Тейлора [12] за счёт действия сил Кориолиса при малом числе Россби $Ro \sim |(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}| / |\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}|$, где \mathbf{v} — вектор поля скорости жидкости, $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость вращения. Подавляющая часть кинетической

энергии течения содержится в наборе однородных по вертикали вихрей, в которых скорость направлена горизонтально. Такое течение также называют геострофическим, поскольку силы Кориолиса в нём являются чисто потенциальными и компенсируются перепадом давления, что называют геострофическим балансом. Эффект двумеризации течения в быстро вращающейся жидкости уже несколько десятилетий исследовался экспериментально [13]. В численном моделировании [9] наблюдалось изменение характера турбулентного течения при увеличении угловой скорости вращения (уменьшение числа Россби). При больших числах Россби течение представляло собой статистически изотропную трёхмерную турбулентность, при малых числах Россби оно становилось анизотропным, приобретало форму устойчивых геострофических вихрей. При этом энергетический спектр течения становился намного круче, приближаясь к $E(k) \propto k^{-3}$.

В данной диссертации изучаются турбулентные вихревые течения в быстро вращающейся жидкости. Мы исследуем статистику турбулентных пульсаций в присутствии трехмерного когерентного вихревого течения. В двумерном когерентном вихре турбулентные пульсации двумерны [7], а в трехмерном когерентном вихре турбулентные пульсации трёхмерны и представляют собой ансамбль инерционных волн [14]. В работах [7] и [14] показано, что статистика пульсаций в присутствии когерентных течений значительно отличается от статистики пульсаций в изотропном случае как в двумерной, так и в трехмерной задачах. Это обусловлено сильным влиянием градиента скорости когерентного течения на динамику мелкомасштабных флуктуаций. В свою очередь мелкомасштабные пульсации $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ оказывают существенное влияние на крупномасштабный профиль когерентного вихря $\mathbf{U}(\mathbf{r})$, отвечая за поддержание когерентного течения. Среднее от произведения радиальной и азимутальной компонент поля скорости мелкомасштабных пульсаций $\langle u^\rho u^\phi \rangle$ есть вклад в касательную компоненту тензора напряжений Рейнольдса $\Pi^{\phi\rho}$ [14], ответственный за формирование “отрицательной турбулентной вязкости” [15]. Поэтому исследование статистики турбулентных пульсаций в присутствии трехмерного когерентного вихря

представляет особый интерес. Объектами исследования статистики мелкомасштабных флуктуаций являются корреляционные функции. Для двумерного [7] и трехмерного [14] течений было посчитано среднее $\langle u^\rho u^\phi \rangle$, значения которого совпали, но структура оказалась различной. Мы более детально исследуем статистику турбулентных пульсаций путём вычисления структурных функций различных компонент поля скорости.

Следующим рассмотренным нами вопросом стало описание статистических свойств рассматриваемых течений проводящей жидкости в присутствии магнитного поля. Обширный класс течений приводит к усилению некоторого начального магнитного поля, что называется эффектом динамо [16]. Мы рассматриваем кинематическую стадию динамо, на которой магнитное поле слабо влияет на течение, и не рассматриваем последующую стадию насыщения этого поля за счет обратной реакции на поток [17]. Примерами подобного статистически стационарного насыщения являются магнитные поля планет [18], в частности, Земли [19] и когерентные магнитные поля во Вселенной [20]. В таких системах крупномасштабное магнитное поле как правило существует на фоне мелкомасштабных турбулентных пульсаций, поэтому количественно усиление магнитного поля удобно описывать с помощью величин, усредненных по быстрым и мелкомасштабным турбулентным пульсациям потока [21]. Одной из причин генерации магнитного поля является наличие вклада \mathcal{E} в электродвижущую силу, возникающей вследствие взаимодействия флуктуаций поля скорости с мелкомасштабной компонентой магнитного поля, определяемой взаимодействием турбулентных пульсаций и крупномасштабной компоненты магнитного поля. Если же в турбулентном потоке нарушена зеркальная симметрия и, как следствие, есть ненулевая спиральность [22], электродвижущая сила будет линейно связана с крупномасштабной компонентой магнитного поля $\overline{\mathbf{B}}$: $\mathcal{E} = \hat{\alpha} \overline{\mathbf{B}}$, где $\hat{\alpha}$ — псевдотензор второго ранга. Вследствие спиральности течения жидкости увлекаемые ею тороидальные магнитные поля могут преобразовываться в полоидальные [23]. Данная линейная зависимость называется α -эффектом [24].

Отметим эксперименты [25], в которых намеренно создаётся вихрь тороидальной формы с ненулевой спиральностью потока с целью активировать механизм динамо по α -эффекту. Мы рассчитываем α -эффект для трехмерного когерентного вихря проводящей жидкости в магнитном поле.

Последним объектом нашего исследования являются волновые системы, в которых нелинейное межволновое взаимодействие оказывается существенным. Одним из классических примеров подобного нелинейного взаимодействия волн является взаимодействие, описываемое нелинейным уравнением Шредингера [26], которое характеризует реальные процессы в различных физических системах: волны на глубокой воде [27], волны Ленгмюра в плазме [28], конденсат Бозе-Эйнштейна в сверхпроводниках и сверхтекучих жидкостях [29], электромагнитные волны в оптоволокне [30]. Примером системы с таким характером взаимодействия волн является случайный волоконный лазер с распределенной обратной связью [31]. Статистику сигнала, динамика которого описывается нелинейным уравнением Шредингера, нельзя описывать в терминах кинетического уравнения в силу свойств интегрируемости этого уравнения [32]. Однако присутствие в системе усиления нарушает интегрируемость, что позволило развить кинетическую теорию для подобных систем в работе [33]. Эта кинетическая теория позволяет описывать количественные характеристики излучения. В частности, в работе [33] была найдена ширина спектра излучения, величина которой хорошо согласуется с экспериментом. В данной диссертации мы исследуем другую, не менее важную характеристику систем этого класса — статистику интенсивности выходного излучения случайного волоконного лазера. Знание статистики интенсивности и механизма её установления позволяет оценить риски возникновения сильных “выбросов” [34] в волновом пакете, прошедшем через среду с нелинейностью и циклическим усилением, и выявить способы снижения вероятности возникновения таких выбросов.

Таким образом, целью данной работы является определение свойств парной корреляционной функции поля скорости турбулентных пульсаций в

трехмерных когерентных вихревых течениях, в том числе и проводящей жидкости, а также нахождение статистики интенсивности случайного волнового поля, прошедшего через квазиодномерную среду с кубической нелинейностью и усилением.

Поставленная цель достигается путем решения следующих задач:

1. Вычисление средних от парных произведений компонент поля скорости для описания статистических свойств трехмерных когерентных вихрей;
2. Вычисление структурных функций флуктуаций поля скорости в трехмерных геострофических и двумерных когерентных вихрях;
3. Вычисление средней скорость-завихренность для трехмерных геострофических когерентных течений с ненулевой спиральностью;
4. Определение связи электродвижущей силы, возникающей за счет трехмерного когерентного вихревого течения проводящей жидкости, с магнитным полем, а также величины α -эффекта;
5. Определение критерия неустойчивости среднего магнитного поля в трехмерном когерентном геострофическом вихре проводящей жидкости;
6. Нахождение функции распределения интенсивности случайного волнового поля, прошедшего через протяженную среду с керровской нелинейностью и усилением.

На защиту выносятся следующие научные положения и результаты, принадлежащие лично автору:

1. Определен вид структурных функций поля скорости в трехмерном и двумерном когерентных вихревых течениях в зависимости от мощности накачки, вязкости среды и пространственных координат на масштабах r , малых по сравнению с масштабом накачки k_f^{-1} .
2. Установлена зависимость величины α -эффекта от мощности накачки, вязкости, проводимости и угловой скорости вращения трехмерного когерентного

вихревого течения проводящей жидкости в магнитном поле в области малых чисел Россби и Экмана ($Ek \ll Ro \lesssim 1$), а также малого магнитного числа Прандтля ($Pr_m \lesssim 1$).

3. Установлен критерий неустойчивости среднего магнитного поля в трехмерном когерентном геострофическом вихре, зависящий от чисел Ro , Ek , Pr_m , а также величины отношения масштаба накачки к масштабу среднего магнитного поля k_f/k_b .
4. Определена функция распределения интенсивности волнового пакета после его прохождения через квазиодномерную среду с керровской нелинейностью и циклическим усилением.

Научная новизна работы определяется следующими результатами:

1. Впервые установлены структурные функции различных компонент поля скорости в зависимости от координат для трехмерных и двумерных когерентных вихревых течений на малых по сравнению с масштабом накачки пространственных масштабах;
2. Путем сравнения посчитанных структурных функций различных компонент турбулентных пульсаций поля скорости для трехмерных и двумерных когерентных течений на малых масштабах в зависимости от мощности накачки и вязкости среды установлено, что в трехмерном случае структурная функция имеет более анизотропный характер;
3. Вычислен тензор, являющийся средним от произведения скорости и завихренности флуктуаций в трехмерном когерентном вихре, в случае, когда возбуждающая течение сила статистически асимметрична по отношению к зеркальному отражению;
4. Получено выражение величины α -эффекта для трехмерных когерентных вихревых течений проводящей жидкости с ненулевой спиральностью в присутствии магнитного поля в зависимости от чисел Россби Ro , Экмана Ek и

магнитного числа Прандтля Pr_m в практически важной области их значений $Ek \ll Ro \lesssim 1$, $Pr_m \lesssim 1$;

5. Получен критерий роста магнитного поля для трехмерного когерентного географического вихря проводящего спирального течения, зависящий от чисел Ro , Ek , Pr_m , а также отношения k_f/k_b пространственных масштабов накачки и среднего поля;
6. Найдена функция распределения интенсивности волнового пакета, прошедшего через протяженную среду с керровской нелинейностью и циклическим усилением, а также выражение для коэффициента эксцесса как безразмерного параметра нелинейности в первом и втором порядках, определяющего её отличие от релеевской.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в том, что

- результаты исследования могут быть использованы при проведении расчетных оценок и для улучшения качественного понимания некоторых природных явлений (такие как циклоны и антициклоны, торнадо, смерчи, столбчатые вихри в мантии Земли и т.п.), а также для оптимизации ряда технологических процессов (камеры сгорания, сушильные установки и т.д.);

- вычисленная функция распределения интенсивности волнового пакета свидетельствует о малом отличии статистики интенсивности выходящего сигнала от релеевской, что говорит о низкой вероятности "выбросов" в такой системе. Эти результаты могут быть использованы для создания волоконных линий сверхдальней связи, а также для оптимизации технологических процессов, связанных со случайными волоконными лазерами.

Актуальность исследования состоит в необходимости детального аналитического описания когерентных вихревых течений, в том числе в магнитных полях, а также статистики активных циклических нелинейных волновых систем.

Методология и методы исследования. Для качественного и количественного изучения физических и математических моделей, описывающих статистические свойства обозначенных выше когерентных вихревых и волновых систем, автором применялись: аппарат теории турбулентности, волновой кинетической теории, магнитной гидродинамики и статистической физики, аппарат уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений, аппарат математического анализа, интегрального исчисления и теории вероятности, аппарат диаграммной техники, приближенные методы аналитических вычислений и асимптотик.

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается физически обоснованными, непротиворечивыми математическими моделями гидродинамики несжимаемой жидкости и уравнением Навье-Стокса, нелинейным уравнением Шредингера и диаграммной техникой Уайльда, соотношениями магнитной гидродинамики, согласованностью найденных зависимостей с натурными и численными экспериментами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- Л.Л. Огородников, С.С. Вергелес, В.В. Лебедев, Статистика излучения сверхдлинного волоконного лазера с обратной связью на случайных рассеивателях, 7-й Российский семинар по волоконным лазерам, Новосибирск, 5-9 сентября 2016.

- С.С. Вергелес, Л.Л. Огородников, В.В. Лебедев, И.В. Колоколов, "Отличие статистики излучения случайного волоконного лазера от гауссовой" , VI Международная конференция по фотонике и информационной оптике, Москва, 01-03 февраля 2017.

- L.L. Ogorodnikov, S.S. Vergeles, V.V. Lebedev, "Intensity Statistics of the Emission of Raman Random Fiber Laser" , Optics, Photonics and Lasers: Proc. 1st International Conference on on Optics, Photonics and Lasers (OPAL' 2018), 9-11 May 2018, Barcelona, Spain, p. 257-260 (2018).

- Л.Л. Огородников, С.С. Вергелес "Структура и пространственные корреляции столбчатых когерентных вихрей в трехмерной вращающейся жидкости" , XV Международная конференция "Забабахинские научные чтения" , г. Снежинск, 27 сентября – 1 октября 2021.

- Л.Л. Огородников, Вергелес С.С., Лебедев В.В. "Статистика интенсивности выходного излучения случайного волоконного лазера" , XVIII Научная школа "Нелинейные волны-2018", г. Нижний Новгород, 26 февраля - 4 марта 2018.

- Вергелес С.С., Огородников Л.Л. "Поведение когерентных вихрей в трехмерной жидкости" , Международная конференция «XXI Харитоновские тематические научные чтения», г. Саров, 15 – 19 апреля 2019 г.

- Л.Л. Огородников, Вергелес С.С. "Исследование корреляционных свойств трехмерного когерентного вихря" , Самарские чтения (в память об академике А.А. Самарском), Москва, 22-25 декабря 2021 г.

- Vergeles S.S., Ogorodnikov L.L. "Coherent columnar vortex in three-dimensional rotating turbulent flow: structure and spatial correlations" , IV Russian Conference on Magnetohydrodynamics, September 20 – 22, 2021, Perm, Russia

- Л.Л. Огородников, С.С. Вергелес "Влияние трехмерного когерентного вихря проводящей жидкости на внешнее магнитное поле" , "XXIII Харитоновские тематические научные чтения" , г. Саров, 3-7 октября 2022.

- Л.Л. Огородников, С.С. Вергелес " α -эффект в магнитном поле в присутствии трехмерного когерентного вихревого течения проводящей жидкости" , XX Научная школа "Нелинейные волны – 2022", г. Нижний Новгород, 7-13 ноября 2022.

Публикации. По теме диссертации **опубликованы** 4 печатные работы в статьях [35], [14], [36], [?], 3 из которых также входят в перечень WoS, и 10 работ в материалах конференций.

Личный вклад автора заключается в участии в формулировке темы диссертационной работы, проведении аналитических исследований, обсуждении

и интерпретации полученных результатов, подготовке материалов к публикации.

Таким образом, в результате выполнения научно-квалификационной работы решена важная научная задача, связанная с исследованием статистических свойств когерентных волновых течений, которая может быть использована в интересах прогнозирования ряда природных явлений (в том числе катаклизмов), оптимизации передачи сигналов на дальние расстояния и интенсификации технологических процессов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы 156 страниц, 14 рисунков. Список литературы состоит из 128 наименований.

Благодарности

Автор диссертационной работы **благодарен** научному руководителю, Сергею Сергеевичу Вергелесу, за помощь в постановке задачи и многочисленные обсуждения промежуточных и финальных результатов, Колоколову Игорю Валентиновичу и Лебедеву Владимиру Валентиновичу за поддержку, важные замечания и интерес, проявленный к работе. Автор благодарен всем участникам семинаров и конференций, на которых присутствовал и выступал, и постарался учесть их замечания и рекомендации, высказанные на научных мероприятиях.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, приводится общая характеристика работы, формулируется цель работы и решаемые задачи для её достижения, отмечаются её научная новизна, теоретическая и практическая значимость, обосновывается достоверность полученных результатов и личный вклад автора в работу, приводятся научные положения, выдвигаемые на защиту.

В первой главе диссертации содержится литературный обзор по теме научного исследования. Рассматриваются различные режимы течений жидко-

сти от ламинарного до развитого турбулентного вихревого движения. Приводятся примеры течений в форме трехмерных когерентных столбчатых вихрей. Отмечается их позитивная и негативная роль в ряде природных и технологических процессов.

Рассматриваются способы описания вихревых течений, отмечается сложность получения точного решения уравнения Навье-Стокса для таких движений и обосновывается необходимость статистического способа их описания, в том числе, с использованием корреляционных функций. Излагаются основные положения теории трехмерных когерентных вихревых течений, развитой в [14], позволяющей определить профиль скорости среднего течения $U(r)$ и получить выражение для перекрестного коррелятора флуктуаций поля скорости $\langle u^\xi u^\eta \rangle$. Далее в обзоре освещается важность исследования влияния трехмерного когерентного вихревого течения проводящей жидкости на внешнее магнитное поле. Проводится анализ области значений магнитных чисел Прандтля, которые уместно рассматривать на практике для решения поставленной задачи. Обсуждается связь α -эффекта, выраженного количественно в виде матрицы пропорциональности между компонентами электродвижущей силы, возникающей за счет турбулентного течения проводящей жидкости в магнитном поле, и компонентами самого магнитного поля, с преобразованием тороидального магнитного поля в полоидальное. Указывается, что α -эффект возможен в течении с дифференциальным вращением и нарушением зеркальной симметрии, а такое спиральное течение может быть создано искусственно. В обзоре анонсируется, что величина α -эффекта трехмерного когерентного вихря проводящей жидкости вычисляется в области малых чисел Ek , Ro и Pr_m в третьей главе. В обзоре также говорится о важности исследования статистических свойств течений в другом предельном случае, когда амплитуда флуктуаций становится сравнимой с величиной среднего течения. В качестве одного из классов таких нелинейных систем рассматриваются системы, описываемые нелинейным уравнением Шредингера, которое может быть использовано для описания как волн на глубокой воде, так волн

в оптоволокне. Обсуждаются способы статистического исследования активных волновых систем с циклическим усилением, к которым относится случайный волоконный лазер с обратной связью. Делается вывод о возможности применения волновой кинетической теории, описанной в [33] на примере случайного волоконного лазера, для исследования таких систем.

Во второй главе изложен подход, позволяющий количественно описывать статистические свойства турбулентных течений и, в частности, трехмерных когерентных вихревых течений:

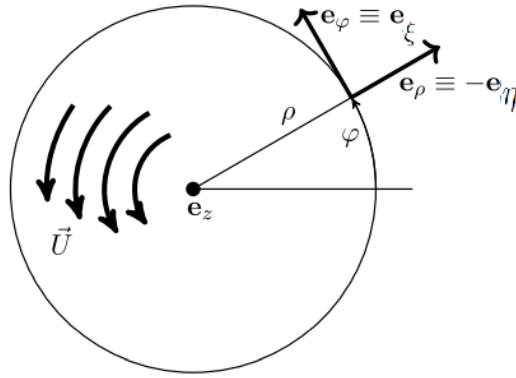


Рис. 1: Профиль скорости трехмерного когерентного вихря

Предполагается возможным разделение течения на средний крупномасштабный поток \mathbf{U} и турбулентные пульсации \mathbf{u} . Задача решается в пределе большого числа Рейнольдса Re , малых чисел Россби Ro и Экмана $Ek \ll Ro$. Статистика случайных сил, передающих энергию вихрю, предполагается скоррелированной на малых временах и пространственных масштабах $\sim k_f^{-1}$. Проведены вычисления структурной функции скорость-скорость различных компонент флуктуаций поля скорости \mathbf{u} на малых пространственных масштабах для трехмерных когерентных вихревых течений:

$$S^{ij}(\mathbf{r}) = \langle (u^j(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) - u^j(\mathbf{r}')) (u^i(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) - u^i(\mathbf{r}')) \rangle, \quad (1)$$

где по координате \mathbf{r}' предполагается усреднение. Были получены следующие результаты для компонент структурной функции поля скорости в трехмерном

когерентном вихре:

$$S^{\xi\xi}(\mathbf{r}) \approx S^{zz}(\mathbf{r}) \approx S^{ii}(\mathbf{r})/2 \sim \frac{\epsilon k_f^2}{2|\Sigma|} (\ln \tau_* \cdot \xi^2 + \tau_*^2 \eta^2 - \varsigma \tau_* \xi \eta + \ln^2 \tau_* \cdot z^2); \quad (2)$$

$$S^{\eta\eta} \sim \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\xi^2 - \varsigma \cdot \eta \xi + \ln^2 \tau_* \cdot \eta^2 + \ln \tau_* \cdot z^2), \quad (3)$$

$$S^{\xi\eta} \sim \varsigma \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\xi^2 - \varsigma \ln \tau_* \cdot \xi \eta + \tau_* \eta^2 + z^2), \quad (4)$$

$$S^{\xi z} \sim -\frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\xi z + \varsigma \cdot \eta z), \quad S^{\eta z} \sim -\frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (-\varsigma \xi z + \ln^2 \tau_* \cdot \eta z), \quad (5)$$

где ϵ — мощность накачки, $\varsigma = \text{sign}(\Sigma)$, $\tau_* = (\text{Ro}/\text{Ek})^{1/3}$ — безразмерный параметр, соответствующий характерному времени, определяемому “вязкой экспонентой”. Также показано, что основной вклад в структурную функцию дают волновые векторы из сектора быстрых осцилляций ($k_z/k \gtrsim \text{Ro}$). С учетом свойств двумерных флуктуаций [14], [37] посчитаны структурные функции различных компонент поля скорости турбулентных пульсаций в двумерном когерентном вихре в зависимости от мощности накачки и вязкости среды. Сравнение показало, что в трехмерном когерентном вихревом течении структурная функция имеет более анизотропный вид, чем в двумерном когерентном течении.

Третья глава посвящена рассмотрению вопросов генерации магнитного поля в вихревом потоке проводящей жидкости для случая малых магнитных чисел Прандтля $\text{Pr}_m \lesssim 1$. В частности, рассмотрен α -эффект, связанный с тем, что турбулентный характер вихревого потока приводит к преобразованию тороидального магнитного поля в полоидальное, которое в свою очередь приводит к возникновению электродвижущей силы. В данной главе исследован α -эффект для трехмерного когерентного вихря с ненулевой спиральностью в проводящей жидкости. С использованием модели трехмерного когерентного вихря найдены компоненты одноточечного коррелятора скорость-завихренность. В присутствии такого когерентного вихря в проводящей жидкости рассмотрено поведение магнитного поля. Показано, что связь между компонентами электродвижущей силы \mathcal{E} и магнитного поля $\overline{\mathbf{B}}$ линейная: $\mathcal{E}^i = \alpha_{ip} \overline{B}_p$, а также получе-

но выражение для всех элементов псевдотензора α в трехмерном когерентном вихревом течении проводящей жидкости в зависимости от величин вязкости, магнитной диффузии, угловой скорости вращения и коэффициента сдвига, то есть в зависимости от чисел Ro , Ek и Pr_m . Определена связь между псевдотензором $\hat{\alpha}$ и тензором \hat{H} , элементы которого являются корреляторами различных компонент скорости и завихренности:

$$\alpha_{ip} = \frac{\kappa k_f^2}{2\Omega^2} \int (d^3k) \frac{k^4}{k_z^2 + (k/\tau_\Omega)^6} (H_{ip} + H_{pi} - H\delta^{ip})_{\mathbf{k}}, \quad (6)$$

где используется безразмерное отношение $\tau_\Omega = (2\Omega/\kappa k_f^2)^{1/3} = (\text{Pr}_m/\text{Ek})^{1/3}$, характеризующее отношение скорости вращения Ω к величине магнитной диффузии κk_f^2 . Найдено выражение для элементов $\hat{\alpha}$ в практически важной области параметров $\text{Ek} \ll \text{Ro} \lesssim 1$, $\text{Pr}_m \lesssim 1$ в зависимости от различных соотношений между этими параметрами:

$$\hat{\alpha} \sim -\frac{\epsilon_h}{\Sigma^2} \text{Ro} \begin{pmatrix} \beta_{\xi\xi} & -\varsigma\tau_* & 0 \\ -\varsigma\tau_* & \tau_*^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{zz} \end{pmatrix}, \quad \text{Ro} \ll \text{Pr}_m; \quad (7)$$

$$\hat{\alpha} \sim -\frac{\epsilon_h}{\Sigma^2} \text{Ro} \begin{pmatrix} \beta_{\xi\xi} & -\varsigma\tau_\Omega & 0 \\ -\varsigma\tau_\Omega & \tau_\Omega^2\beta_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{zz} \end{pmatrix}, \quad \text{Ek} \ll \text{Pr}_m \ll \text{Ro} \quad (8)$$

$$\hat{\alpha} \sim -\frac{\epsilon_h}{|\Sigma|\kappa k_f^2} \begin{pmatrix} 1 & -\varsigma & 0 \\ -\varsigma \ln \tau_* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln \tau_* \end{pmatrix}, \quad \text{Pr}_m \ll \text{Ek} \ll \text{Ro}, \quad (9)$$

где $\beta_{\xi\xi} = -\ln(\text{Ro}(1 + \kappa k_f^2/|\Sigma|))$, $\beta_{zz} = \text{Ro}/\text{Pr}_m$ в пределе $\text{Ro} \ll \text{Pr}_m$; $\beta_{\xi\xi} = -\ln(\text{Pr}_m(1 + \kappa k_f^2/|\Sigma|))$, $\beta_{zz} = \ln(\text{Ro}/\text{Pr}_m)$ в пределе $\text{Pr}_m \ll \text{Ro}$.

Также получено уравнение эволюции среднего магнитного поля в трехмерном когерентном вихре, найден критерий $\sqrt{|\alpha_{\xi\xi}\Sigma|/2} > \kappa k_b^{3/2}$ его неустойчивости во времени, который переписан в терминах чисел Ro , Ek , Pr_m и отношения масштаба накачки к масштабу среднего магнитного поля k_f/k_b .

Заключительная **четвертая глава** посвящена исследованию статистики

другого предельного случая течения, когда флуктуации нельзя считать малыми по сравнению со средним течением. Такие системы становятся нелинейными и в ряде случаев могут описываться нелинейным уравнением Шредингера с усилением:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - g\right)\psi + i\frac{\beta_2}{2}\partial_x^2\psi - i\gamma|\psi|^2\psi = 0, \quad (10)$$

где β_2 — коэффициент дисперсии оптоволокна, g — коэффициент усиления сигнала, γ — параметр Керровской нелинейности. Особый интерес среди них представляет исследование активных циклических волновых систем, в частности, случайного волоконного лазера с распределенной обратной связью. В такой системе, поведение которой описывается в рамках волновой кинетической теории, развитой в [33], определена функция распределения интенсивности волнового пакета на примере излучения, прошедшего через случайный волоконный лазер:

$$\mathcal{F}(I) = \left(1 + \frac{(I/\bar{I})^2 - 4(I/\bar{I}) + 2}{2}K\right) \exp(-I/\bar{I}) \quad (11)$$

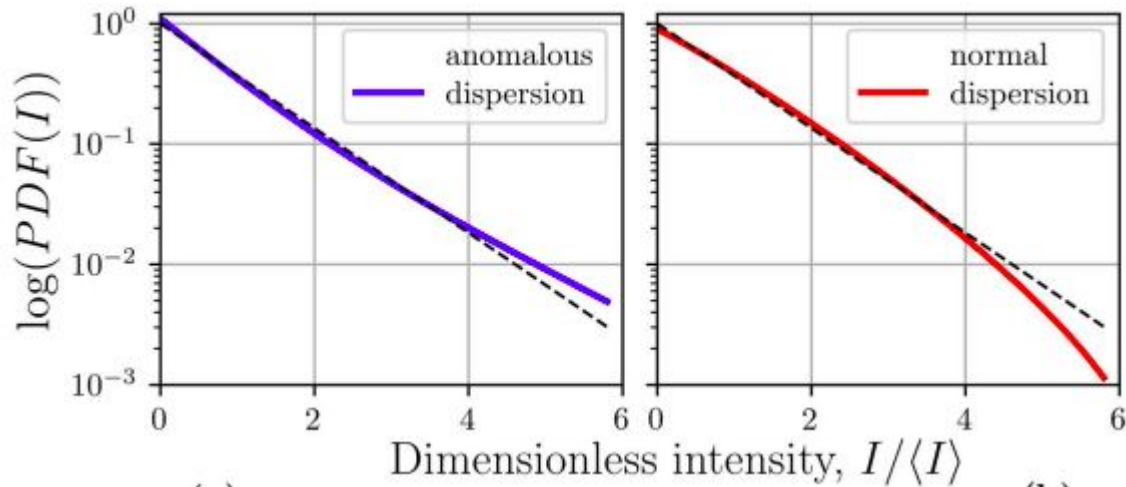


Рис. 2: График функции распределения интенсивности выходного излучения случайного волоконного лазера при $|K| = 0.2$. На рис. 2(a) приведен график для аномальной дисперсии ($\beta_2 < 0$), на рис. 2(b) приведен график для нормальной дисперсии ($\beta_2 > 0$).

В первом и втором порядках по параметру нелинейности $\gamma l_D \bar{I}$ найдено выражение для коэффициента эксцесса \mathcal{K} как безразмерного параметра, определяющего отличие статистики интенсивности выходного излучения от релеев-

ской. В главном порядке по параметру нелинейности при конечном усилении $\epsilon = |gl_D|$ выражение для коэффициента эксцесса будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{K} \approx K = -\frac{4\gamma\bar{I}}{\beta_2\Delta^2} \int (d\omega)(d\omega_1)(d\omega_2) f(\omega - \omega_1) f(\omega - \omega_2) f(\omega) \frac{\omega_1\omega_2}{(2\epsilon)^2 + \omega_1^2\omega_2^2} \quad (12)$$

где $\omega, \omega_{1,2}$ — частоты, обезразмеренные на ширину спектра Δ , $f(\omega) = \bar{I}^{-1} \int dt \langle \psi(L, t' + t) \psi^*(L, t') \rangle \exp(i\Delta\omega t)$ — безразмерный спектр сигнала. Отметим, что знак куртозиса (коэффициента эксцесса K) противоположен знаку коэффициента дисперсии β_2 .

В заключении отмечено, что полученные в работе результаты с использованием статистического подхода позволяют лучше понять природу когерентных вихревых и волновых течений, а также могут быть использованы для выбора постановки численных и экспериментальных исследований, анализа и прогнозирования в будущем некоторых природных явлений и технологических процессов.

По итогам проведенного исследования сделаны следующие **выводы и заключения**:

1. Получены соотношения для описания турбулентных пульсаций в присутствии сильного вращения и сдвигового течения, а также установлены свойства структурной функции турбулентных пульсаций внутри трехмерного когерентного вихря на малых масштабах.

2. Посчитана структурная функция различных компонент турбулентных пульсаций поля скорости на малых масштабах для трехмерного и двумерного когерентных вихревых течений в зависимости от мощности накачки и вязкости среды; установлено, что в трехмерном когерентном вихревом течении структурная функция имеет более анизотропный характер, чем в двумерном.

3. Показано, что основной вклад в корреляционную и структурную функции скорость-скорость дают волновые векторы из сектора быстрых осцилляций.

4. Аналитически исследован α -эффект в трехмерном когерентном вихревом течении проводящей жидкости в магнитном поле, вычислены элементы матрицы α -эффекта в течении с ненулевой спиральностью при различных

магнитном числе Прандтля, числах Россби и Экмана в области их значений $Ek \ll Ro \lesssim 1$, $Pr_m \lesssim 1$.

5. Получена связь между тензором $\hat{\alpha}$ и тензором \hat{H} , элементами которого являются корреляторы различных компонент скорости и завихренности.

6. Получен критерий неустойчивости среднего крупномасштабного магнитного поля в трехмерном когерентном геострофическом вихре проводящей жидкости.

7. Определена функция распределения интенсивности волнового пакета на примере излучения, прошедшего через случайный волоконный лазер.

8. В первом и втором порядках по параметру нелинейности $\gamma l_D \bar{I}$ найдено выражение для коэффициента эксцесса \mathcal{K} как безразмерного параметра, определяющего отличие статистики интенсивности выходного излучения от релеевской.

9. Полученные результаты могут быть использованы для выбора постановки численных и экспериментальных исследований, анализа и прогнозирования в будущем некоторых природных явлений и технологических процессов.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, входящих в Перечень ВАК Минобрнауки РФ
и в базы WebofScience и Scopus:

[1] **L.L. Ogorodnikov** and S.S. Vergeles. Structure function of velocity in a geostrophic vortex under strong rotation. //Physics of Fluids - 2022. – Т. 34. – №12. – С. 125111.

[2] I.V. Kolokolov, **L.L. Ogorodnikov**, and S.S. Vergeles. Structure of coherent columnar vortices in three-dimensional rotating turbulent flow. //Physical Review Fluids - 2020. – Т. 5. – №3. – С. 034604.

[3] **L.L. Ogorodnikov** and S.S. Vergeles. Intensity statistics in a long random fiber raman laser//Optics letters. – 2018. – Т. 43. – №4. – С. 651-654

Публикации, размещённые на ресурсах,
не входящих в перечень ВАК Минобрнауки РФ

[4] **L.L. Ogorodnikov**, S.S. Vergeles. Alpha-effect in three-dimensional coherent vortex of conducting liquid//arXiv preprint arXiv:2212.04230. – 2022.

Список литературы

- [1] Лифшиц Е.М. Ландау Л.Д. *Теоретическая физика, учебное пособие в 10 т., т. VI Гидродинамика, 3е изд., перераб.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968.
- [2] А.Н. Колмогоров. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. *Доклады Академии Наук*, 30:299–303, 1941.
- [3] Guido Boffetta and Robert E Ecke. Two-dimensional turbulence. *Annual review of fluid mechanics*, 44:427–451, 2012.
- [4] Robert H Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *The Physics of Fluids*, 10(7):1417–1423, 1967.
- [5] Murshed Hossain, William H Matthaeus, and David Montgomery. Long-time states of inverse cascades in the presence of a maximum length scale. *Journal of plasma physics*, 30(3):479–493, 1983.
- [6] Joel Sommeria. Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *Journal of fluid mechanics*, 170:139–168, 1986.
- [7] IV Kolokolov and VV Lebedev. Structure of coherent vortices generated by the inverse cascade of two-dimensional turbulence in a finite box. *Physical Review E*, 93(3):033104, 2016.
- [8] M Chertkov, C Connaughton, I Kolokolov, and V Lebedev. Dynamics of energy condensation in two-dimensional turbulence. *Physical review letters*, 99(8):084501, 2007.

- [9] Kannabiran Seshasayanan and Alexandros Alexakis. Condensates in rotating turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 841:434–462, 2018.
- [10] H Xia, M Shats, and Gregory Falkovich. Spectrally condensed turbulence in thin layers. *Physics of Fluids*, 21(12):125101, 2009.
- [11] Artur Valer’evich Orlov, M Yu Brazhnikov, and Aleksandr Alekseevich Levchenko. Large-scale coherent vortex formation in two-dimensional turbulence. *JETP Letters*, 107(3):157–162, 2018.
- [12] Joseph Proudman. On the motion of solids in a liquid possessing vorticity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 92(642):408–424, 1916.
- [13] Fabien S Godeferd and Frédéric Moisy. Structure and dynamics of rotating turbulence: a review of recent experimental and numerical results. *Applied Mechanics Reviews*, 67(3), 2015.
- [14] IV Kolokolov, LL Ogorodnikov, and SS Vergeles. Structure of coherent columnar vortices in three-dimensional rotating turbulent flow. *Physical Review Fluids*, 5(3):034604, 2020.
- [15] Victor P Starr. *Physics of negative viscosity phenomena*. McGraw-Hill, 1968.
- [16] Ia B Zeldovich, Aleksandr Andreevich Ruzmaikin, and Dmitriy Dmitrievič Sokolov. Magnetic fields in astrophysics. *New York*, 3, 1983.
- [17] SM Tobias. The turbulent dynamo. *Journal of fluid mechanics*, 912, 2021.
- [18] Chris A Jones. Planetary magnetic fields and fluid dynamos. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 43:583–614, 2011.
- [19] Nathanaël Schaeffer, Dominique Jault, H-C Nataf, and Alexandre Fournier. Turbulent geodynamo simulations: a leap towards earth’s core. *Geophysical Journal International*, 211(1):1–29, 2017.

- [20] Kandaswamy Subramanian. From primordial seed magnetic fields to the galactic dynamo. *Galaxies*, 7(2):47, 2019.
- [21] Günther Rüdiger and Rainer Hollerbach. *The magnetic universe: geophysical and astrophysical dynamo theory*. John Wiley & Sons, 2006.
- [22] HK Moffatt and A Tsinober. Helicity in laminar and turbulent flow. *Annual review of fluid mechanics*, 24(1):281–312, 1992.
- [23] Eugene N Parker. Hydromagnetic dynamo models. *The Astrophysical Journal*, 122:293, 1955.
- [24] Eugene N Parker. The formation of sunspots from the solar toroidal field. *The astrophysical journal*, 121:491, 1955.
- [25] P Frick, V Noskov, S Denisov, S Khripchenko, D Sokoloff, R Stepanov, and A Sukhanovsky. Non-stationary screw flow in a toroidal channel: way to a laboratory dynamo experiment. *Magnetohydrodynamics*, 38(1-2):143–162, 2002.
- [26] Борис Анатольевич Дубровин, Игорь Моисеевич Кричевер, and Сергей Петрович Новиков. Интегрируемые системы. i. *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»*, 4(0):179–277, 1985.
- [27] Vladimir E Zakharov. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 9(2):190–194, 1968.
- [28] Catherine Sulem and Pierre-Louis Sulem. *The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse*, volume 139. Springer Science & Business Media, 2007.
- [29] Neil Akhmediev and Adrian Ankiewicz. Dissipative solitons in the complex ginzburg-landau and swift-hohenberg equations. In *Dissipative solitons*, pages 1–17. Springer, 2005.

- [30] Antonio Picozzi, Josselin Garnier, Tobias Hansson, Pierre Suret, Stephane Randoux, Guy Millot, and Demetrios N Christodoulides. Optical wave turbulence: Towards a unified nonequilibrium thermodynamic formulation of statistical nonlinear optics. *Physics Reports*, 542(1):1–132, 2014.
- [31] Sergei K Turitsyn, Sergey A Babin, Dmitry V Churkin, Ilya D Vatnik, Maxim Nikulin, and Evgenii V Podivilov. Random distributed feedback fibre lasers. *Physics reports*, 542(2):133–193, 2014.
- [32] Vladimir E Zakharov. Turbulence in integrable systems. *Studies in Applied Mathematics*, 122(3):219–234, 2009.
- [33] D V Churkin, I V Kolokolov, E V Podivilov, I D Vatnik, M A Nikulin, S S Vergeles, I S Terekhov, V V Lebedev, Gregory Falkovich, S A Babin, et al. Wave kinetics of random fibre lasers. *Nature communications*, 6(1):1–6, 2015.
- [34] Pierre Walczak, Stéphane Randoux, and Pierre Suret. Optical rogue waves in integrable turbulence. *Physical review letters*, 114(14):143903, 2015.
- [35] Leon L Ogorodnikov and Sergey S Vergeles. Structure function of velocity in a geostrophic vortex under strong rotation. *Physics of Fluids*, 34(12):125111, 2022.
- [36] LL Ogorodnikov and SS Vergeles. Intensity statistics in a long random fiber raman laser. *Optics letters*, 43(4):651–654, 2018.
- [37] Vladimir M Parfenyev and Sergey S Vergeles. Influence of ekman friction on the velocity profile of a coherent vortex in a three-dimensional rotating turbulent flow. *Physics of Fluids*, 33(11):115128, 2021.