

На правах рукописи

Огородников Леон Леонтьевич

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА  
КОГЕРЕНТНЫХ ВИХРЕВЫХ И  
ВОЛНОВЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

Специальность 1.3.14 —  
«Теплофизика и теоретическая теплотехника»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики»

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент  
**Вергелес Сергей Сергеевич**

Официальные оппоненты: **Змитренко Николай Васильевич**,  
доктор физико-математических наук, доцент,  
главный научный сотрудник ФГУ "Федеральный  
исследовательский центр Институт прикладной  
математики им. М.В. Келдыша Российской ака-  
демии наук",

**Зацепин Андрей Георгиевич**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
главный научный сотрудник лаборатории экспе-  
риментальной физики океана ФГБУН Институт  
океанологии им. П.П. Ширшова Российской ака-  
демии наук,

Ведущая организация: ФГБУН Институт физики твердого тела Россий-  
ской академии наук

Защита состоится 4 октября 2023 г. в 11 часов на заседании диссертационного  
совета 24.1.193.01 на базе ФГБУН Объединенный институт высоких темпера-  
тур Российской академии наук по адресу: 125412, Москва, улица Ижорская,  
дом 13, строение 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке \_\_\_\_\_.

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета

24.1.193.01, канд. физ.-мат. наук

Тимофеев Алексей Владимирович

## Общая характеристика работы

В большинстве природных явлений и технологических процессов движение жидкости и газа характеризуется большими числами Рейнольдса. Даже если допустить, что в заданный момент такое течение ламинарно, после превышения числом Рейнольдса  $Re$  некоторого порогового значения  $Re_{cr}$ , называемого критическим, амплитуда присущих потоку флуктуаций, зачастую имеющих теплофизическую природу в реальных течениях, будет расти со временем, и при определенных условиях течение может перейти в неустойчивый, или турбулентный, режим [1]. Для каждой геометрии течения существует свое  $Re_{cr}$ , которое, как правило, составляет величину  $Re_{cr} \gtrsim 10^3 \div 10^4$  для глобального потока (например, для течения жидкости по трубе) [2]. Если речь идет об однородной изотропной турбулентности, характерные числа Рейнольдса на масштабе инерционного интервала могут быть порядка  $Re \gtrsim 1 \div 10$  [1]. При конечном градиенте температуры в течении жидкости наступление турбулентности определяется числом Рэлея  $Ra$  [1]. Сведения о точном значении величин мгновенных параметров турбулентных течений не дают представления о характере эволюции системы, поэтому хаотические течения следует описывать в рамках статистического подхода.

Данный подход позволяет исследовать статистические свойства случайных систем. Он предполагает вычисление средних величин (например, поля скорости и поля температуры) после усреднения по быстрым флуктуациям [3]. Для решения фундаментальных или прикладных задач с помощью данного подхода удобно вычислять средние от возведенных в различные степени случайных величин, в том числе взятые в различные моменты времени или в различных точках пространства. Так, для установления пространственных корреляций удобно вычислять корреляционные и структурные функции измеряемого поля, а для вычисления функции распределения интересующей случайной величины необходимо вычислять средние различных степеней этой самой величины [3]. В данной работе статистический подход применяется для описания поведения случайных систем разной природы. В одном случае исследуется статистика флуктуаций трехмерных когерентных геострофических вихрей в непроводящей, а затем в проводящей однородной жидкости. Под "когерентным" понимается крупномасштабное течение, время существования которого значительно больше характерного времени дисси-

пации в системе [4]. В трехмерном когерентном геострофическом вихре на фоне среднего крупномасштабного течения существуют быстрые мелкомасштабные флуктуации [5]. В рассматриваемой постановке эти пульсации возбуждаются за счет модельной случайной силой, которая применительно к ряду таких течений в атмосфере как циклоны, торнадо, смерчи [6] может иметь конвективную природу [7]. Амплитуда флуктуаций предполагается достаточно малой по сравнению со средним крупномасштабным вихрем, так что их динамика линейна. Схожие течения формируются внутри жидкого внешнего ядра Земли и в некоторых других астрономических объектах [8], так что в рассматриваемом вихре проводящей жидкости возникает похожая картина. Кроме того, понимание принципов формирования такого вихря проводящей жидкости представляет интерес для задач охлаждения реакторов с жидкометаллическим теплоносителем [9; 10]. В другом случае рассматривается эволюция огибающей напряженности электромагнитного поля в случайном волоконном лазере, и с помощью статистического подхода вычисляется функция распределения интенсивности излучения. В такой системе огибающая подчиняется модифицированному нелинейному уравнению Шредингера, где кубическим самодействием флуктуаций пренебречь нельзя, однако в пределе слабонелинейном режиме для описания статистических свойств системы возможно разложение по малому параметру нелинейности. Далее рассмотрим более подробно природу трехмерного когерентного геострофического вихря, затем – случайного волоконного лазера.

Первым существенным теоретическим результатом в области статистического описания турбулентных течений при постоянной температуре является теория для статистически изотропного трехмерного развитого турбулентного потока, созданная А.Н. Колмогоровым [11]. В теории Колмогорова устанавливаются законы подобия, исходя из утверждения о существовании прямого каскада энергии и локальном взаимодействии по масштабам внутри инерционного интервала. Прямой каскад энергии подразумевает, что большие вихри распадаются на более мелкие и так далее, т.е. энергия переходит от больших масштабов к малым. Локальность взаимодействия по масштабам означает, что в процессе дробления участвуют вихри только близких размеров. Турбулентное двумерное течение значительно отличается от трёхмерного, поскольку в нём есть вторая сохраняющаяся квадратичная по скорости

величина в пределе малой вязкости — энстрофия — помимо кинетической энергии. Вследствие этого в двумерном турбулентном течении устанавливаются два каскада [12] — обратный каскад энергии, в результате чего из более мелких вихрей образуются более крупные, и прямой каскад энстрофии, в результате которого завихренность передаётся на мелкие масштабы.

В случае ограниченной геометрии обратный каскад накапливает кинетическую энергию на самом большом из доступных масштабов. Вследствие этого возникает конденсат, который чаще всего оказывается вихрем или системой вихрей, что было предсказано в теоретической работе [13], а также обнаружено в численных и натуральных экспериментах при постоянной температуре [14]. И.В. Колоколов и В.В. Лебедев создали аналитическую теорию для двумерного когерентного вихря [15], описывающую как интенсивное среднее течение вихрей, так и флуктуации на его фоне, которые представляют собой хаотическое во времени и пространстве изменение скорости. Ключевым отличием этой теории от теории изотропной турбулентности является утверждение о нелокальности взаимодействия по масштабам, так что нелинейное влияние неоднородности конденсата на турбулентные пульсации сильнее, чем нелинейное взаимодействие пульсаций между собой. Это приближение оправдывается, в частности, существенно более крутым спектром энергии  $E(k) \propto k^{-3}$  в присутствии конденсата [16] по сравнению со спектром для изотропной турбулентности  $E(k) \propto k^{-5/3}$ . Теория объясняет результаты численных [17] и лабораторных [18] экспериментов по формированию устойчивых когерентных вихрей, связав их характеристики со статистическими свойствами флуктуаций течения.

В данной диссертации изучаются турбулентные вихревые течения в быстро вращающейся трехмерной жидкости. Модель, лежащая в основе таких вихрей, может быть обобщена на обширный класс течений в природе. Примерами таких течений в атмосфере являются торнадо, смерчи, циклоны (воздушные вихри с пониженным давлением) и антициклоны (вихри с повышенным давлением) [6]. Аналогичные течения возникают во внешнем ядре Земли и в других астрономических объектах [8]. Схожие потоки возникают и в различных технологических процессах: разделение изотопов тяжелых металлов в центрифугах, конвекция в теплообменных аппаратах, нанесение защитных покрытий с использованием струйных плазмотронов и т.д. [19]. В

большинстве названных выше течениях имеют место конвективные процессы и наличие тепловых флуктуаций в системе. Их влияние на течение может быть учтено путем добавления случайной силы, передающей течению конечную мощность.

Большинство физических течений трехмерны, и масштабы по каждому из направлений сравнимы. Двумерное течение – модель, применимая для трехмерного с подавленной вертикальной компонентой скорости, что может происходить по ряду причин, в том числе геометрическим. Натурные эксперименты по двумерной турбулентности как раз проводятся на тонких жидких слоях [14; 18]. Подавление вертикальной компоненты скорости и однородность скорости вдоль вертикальной оси, достигаемые за счет быстрого вращения жидкости как целого вокруг этой оси, обусловлено согласно теореме Прудмана-Тейлора [20] действием сил Кориолиса при малом числе Россби  $Ro \sim |(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}| / |\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}|$ , где  $\mathbf{v}$  – вектор поля скорости жидкости,  $\boldsymbol{\Omega}$  – угловая скорость вращения. Большая часть кинетической энергии течения содержится в наборе однородных по вертикали вихрей, в которых скорость направлена горизонтально. Такое течение является геострофическим, поскольку силы Кориолиса в нём являются чисто потенциальными и компенсируются перепадом давления, что называют геострофическим балансом [21]. Эффект двумеризации течения в быстро вращающейся жидкости уже несколько десятилетий исследовался экспериментально [22]. В численном моделировании [17] наблюдалось изменение характера турбулентного течения при увеличении угловой скорости вращения (уменьшение  $Ro$ ). При больших  $Ro$  течение представляло собой статистически изотропную трёхмерную турбулентность, при малых – становилось анизотропным, приобретало форму устойчивых геострофических вихрей. В связи с этим представляет интерес исследование статистики турбулентных пульсаций в присутствии трехмерного когерентного вихря.

В двумерном когерентном вихре турбулентные пульсации двумерны [15], а в трехмерном когерентном вихре турбулентные пульсации трёхмерны и представляют собой ансамбль инерционных волн [5]. В работах [15] и [5] показано, что статистика пульсаций в присутствии когерентных течений значительно отличается от статистики пульсаций в изотропном случае как в двумерной, так и в трехмерной задачах. Это обусловлено сильным влиянием градиента скорости когерентного течения на динамику мелкомасштабных

флуктуаций. В свою очередь мелкомасштабные пульсации  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  оказывают существенное влияние на крупномасштабный профиль когерентного вихря  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ , отвечая за поддержание когерентного течения. Среднее от произведения радиальной и азимутальной компонент поля скорости мелкомасштабных пульсаций  $\langle u^r u^\varphi \rangle$  есть вклад в касательную компоненту тензора напряжений Рейнольдса  $\Pi^{\varphi\rho}$  [5], ответственный за формирование “отрицательной турбулентной вязкости” [23]. Отметим, что масштаб флуктуаций определяется статистикой случайной силы. В [24] поле этих сил создавалось за счет быстрого вращения небольших лопастей, расположенных по краям сосуда с жидкостью. В некоторых системах эта сила может также иметь конвективную природу. Так, в [7] описаны численные эксперименты с похожей постановкой, но отличными от рассматриваемой задачи теплофизическими и гидродинамическими параметрами течения (конвекция Рэлея-Бенара). В некоторой области значений параметров задачи формируются когерентные структуры, называемые в этих работах крупномасштабными вихрями (large scale vortexes, LSV). Поэтому в рамках приближения Буссинеска влияние конвекции может быть учтено в уравнении Навье-Стокса в виде случайного поля внешних сил. Количественное исследование статистических свойств поля скорости в сдвиговом конвективном течении представляется крайне сложной задачей. Для простоты анализа данное поле сил в рассматриваемой модели предполагается однородным по объему и изотропным, а также короткокоррелированным по времени. Отметим, что проведенные в работе вычисления носят общий характер, поэтому для случая неизотропного поля сил с конечным временем корреляций статистические свойства поля скорости могут быть посчитаны тем же методом, что используется для данной модельной постановки. Поэтому исследование статистики турбулентных пульсаций в присутствии трехмерного когерентного вихря представляет особый интерес. Объектами исследования статистики мелкомасштабных флуктуаций являются корреляционные и структурные функции. Эти объекты очень удобны и полезны с практической точки зрения для исследования пространственных корреляций полей скорости течения и температуры [1]. В частности, для задач метеорологии большой практический интерес представляет вычисление пространственных структурных функций [25]. Так, в работе [26] по результатам измерения структурной функции скорости ветра были получены вертикальные профи-

ли внешнего масштаба динамической турбулентности в условиях устойчивой атмосферной стратификации. В работе [27] была описана экспериментальная методика нахождения структурных функций поля скорости в быстро вращающемся турбулентном потоке жидкости. В связи с этим в данной диссертации более детально исследуется пространственная статистика турбулентных пульсаций путём вычисления структурных функций различных компонент поля скорости в трехмерном когерентном геострофическом вихре.

Необходимость создания последовательной аналитической теории трехмерных когерентных течений особенно важна в современных условиях, когда происходит интенсификация многих технологических процессов и обостряются природные катаклизмы. В работе [5] была описана теория, объясняющая причины формирования и сохранения устойчивости трехмерных когерентных вихрей во вращающемся турбулентном потоке жидкости, определены соотношения между параметрами системы, при которых вихрь существует и статистически устойчив. Следующим этапом для более глубокого понимания ряда природных явлений и технологических процессов, связанных с трехмерными вихревыми течениями, с целью управления ими или их оптимизацией стало описание статистических свойств рассматриваемых течений проводящей жидкости. Обширный класс течений может приводить к генерации конечного магнитного поля даже из малого по амплитуде магнитного поля, возникающего за счет тепловых флуктуаций. Данное явление называется эффектом динамо [28]. Мы рассматриваем кинематическую стадию динамо, на которой магнитное поле слабо влияет на течение, и не рассматриваем последующую стадию насыщения этого поля за счет обратной реакции на поток [29]. Примерами подобного статистически стационарного насыщения являются магнитные поля планет [30], в частности, Земли [31] и когерентные магнитные поля во Вселенной [32]. В таких системах крупномасштабное магнитное поле как правило существует на фоне мелкомасштабных турбулентных пульсаций, поэтому количественно усиление магнитного поля удобно описывать с помощью величин, усредненных по быстрым и мелкомасштабным турбулентным пульсациям потока [33]. Одной из причин генерации магнитного поля является наличие вклада  $\mathcal{E}$  в электродвижущую силу, возникающей вследствие взаимодействия флуктуаций поля скорости с мелкомасштабной компонентой магнитного поля, определяемой взаимодействием турбулентных пульсаций и

крупномасштабной компоненты магнитного поля. Если же в турбулентном потоке нарушена зеркальная симметрия и, как следствие, есть ненулевая спиральность [34], электродвижущая сила будет линейно связана с крупномасштабной компонентой магнитного поля  $\overline{\mathbf{B}}$ :  $\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\alpha}\overline{\mathbf{B}}$ , где  $\hat{\alpha}$  — псевдотензор второго ранга. Такая линейная зависимость называется  $\alpha$ -эффектом [35]. Зачастую именно он определяет самогенерацию магнитного поля, обеспечивающую наличие магнитного поля большинства астрономических объектов [36]. Отметим работу [37], в которой намеренно создаётся вихрь тороидальной формы с ненулевой спиральностью потока с целью активировать механизм динамо. Изучение эволюции такого вихря может иметь применение для моделирования процессов, происходящих в реакторах с жидкометаллическим теплоносителем [10]. Так, в исследованиях [38] показано, что совместное воздействие магнитного поля и конвекции при определенном соотношении критериев течения приводит к появлению опасных режимов МГД-теплообмена в трубе и плоском канале. В пристенной области потока жидкого металла развиваются низкочастотные пульсации температуры аномально высокой амплитуды [39]. Причина возникновения этих эффектов может состоять в том, что в потоке вследствие конвекции развиваются вторичные течения в виде крупномасштабных вихрей, устойчивых в магнитном поле [9]. В связи с этим определение величины  $\alpha$ -эффекта для трехмерного когерентного вихря проводящей жидкости представляет большой интерес, чему и посвящен один из разделов данной диссертации.

Другим объектом данного исследования являются волновые системы, в которых нелинейное межволновое взаимодействие существенно. Одним из классических примеров подобного нелинейного взаимодействия волн является взаимодействие, описываемое нелинейным уравнением Шредингера, характеризующее реальные процессы в различных физических системах: волны на глубокой воде [40], волны Ленгмюра в плазме [41], электромагнитные волны в оптоволокне [42]. Примером системы с таким характером взаимодействия волн является случайный волоконный лазер с распределенной обратной связью [43]. Статистику сигнала, динамика которого подчиняется нелинейному уравнению Шредингера, нельзя описывать в терминах кинетического уравнения [44] в силу свойств интегрируемости этого уравнения [45]. Присутствие в системе усиления нарушает интегрируемость, что позволило развить кинети-

ческую теорию для подобных систем в [46]. Эта кинетическая теория позволяет описывать количественные характеристики излучения. В частности, в [46] была найдена ширина спектра излучения, результаты хорошо согласуются с экспериментом. В данной диссертации исследуется другая, не менее важная характеристика систем этого класса — статистика интенсивности выходного излучения. Знание статистики интенсивности и механизма её установления позволяет оценить риски возникновения сильных “выбросов” [47] в волновом пакете, прошедшем через среду с нелинейностью и циклическим усилением, и выявить способы снижения вероятности возникновения таких выбросов, что имеет важное значение при передаче сигналов по оптоволокну и для других приложений.

Отмеченные выше обстоятельства, связанные с необходимостью детального аналитического описания когерентных вихревых течений, в том числе в проводящей жидкости, а также статистики активных циклических нелинейных волновых систем, и определяют актуальность данной работы.

Таким образом, целью данной работы является определение свойств парной корреляционной функции поля скорости турбулентных пульсаций в трехмерных когерентных геострофических вихревых течениях, в том числе проводящей жидкости, при постоянной температуре, а также нахождение статистики интенсивности случайного волнового поля, прошедшего через квазиодномерную среду с кубической нелинейностью и усилением.

Поставленная цель достигается путем решения следующих поставленных задач:

1. Вычислить средние от парных произведений компонент поля скорости для описания статистических свойств трехмерных когерентных геострофических вихрей при постоянной температуре;
2. Вычислить структурные функции флуктуаций поля скорости в трехмерных геострофических и двумерных когерентных вихрях;
3. Вычислить среднее скорость-завихренность для трехмерных когерентных геострофических вихрей с ненулевой спиральностью;
4. Определить связь электродвижущей силы, возникающей за счет взаимодействия флуктуаций магнитного поля с пульсациями течения трехмерного когерентного геострофического вихря проводящей

жидкости, со средним магнитным полем, выраженной в величине  $\alpha$ -эффекта;

5. Определить критерий неустойчивости среднего магнитного поля в трехмерном когерентном геострофическом вихре проводящей жидкости;
6. Найти функцию распределения интенсивности случайного волнового поля, прошедшего через протяженную среду с керровской нелинейностью и усилением.

На защиту выносятся следующие научные положения и результаты, принадлежащие лично автору:

1. Определен вид структурных функций поля скорости в трехмерном и двумерном когерентных вихревых течениях при постоянной температуре в зависимости от мощности накачки, вязкости среды и пространственных координат на масштабах  $r$ , малых по сравнению с масштабом накачки  $k_f^{-1}$ .
2. Установлена зависимость величины  $\alpha$ -эффекта от мощности накачки, вязкости, проводимости и угловой скорости вращения трехмерного когерентного геострофического вихря проводящей жидкости в области малых чисел Россби и Экмана ( $Ek \ll Ro \lesssim 1$ ), а также малого магнитного числа Прандтля ( $Pr_m \lesssim 1$ ).
3. Установлен критерий неустойчивости среднего магнитного поля в трехмерном когерентном геострофическом вихре, зависящий от чисел  $Ro$ ,  $Ek$ ,  $Pr_m$ , а также величины отношения масштаба накачки к масштабу среднего магнитного поля  $k_f/k_b$ .
4. Определена функция распределения интенсивности волнового пакета после его прохождения через квазиодномерную среду с керровской нелинейностью и циклическим усилением.

Научная новизна работы определяется следующими результатами:

1. Впервые установлены структурные функции различных компонент поля скорости в зависимости от координат для трехмерных и двумерных когерентных вихревых течений при постоянной температуре на малых по сравнению с масштабом накачки пространственных масштабах;

2. Путем сравнения посчитанных структурных функций различных компонент турбулентных пульсаций поля скорости для трехмерных и двумерных когерентных течений на малых масштабах в зависимости от мощности накачки и вязкости среды установлено, что в трехмерном случае структурная функция имеет более анизотропный характер;
3. Вычислен тензор, являющийся средним от произведения скорости и завихренности флуктуаций в трехмерном когерентном геострофическом вихре, в случае, когда возбуждающая течение сила статистически асимметрична по отношению к зеркальному отражению;
4. Получено выражение величины  $\alpha$ -эффекта для трехмерных когерентных геострофических вихрей проводящей жидкости с ненулевой спиральностью в зависимости от чисел Россби  $Ro$ , Экмана  $E_k$  и магнитного числа Прандтля  $Pr_m$  в практически важной области их значений  $E_k \ll Ro \lesssim 1$ ,  $Pr_m \lesssim 1$ ;
5. Получен критерий роста магнитного поля для трехмерного когерентного геострофического вихря проводящего спирального течения жидкости, зависящий от чисел  $Ro$ ,  $E_k$ ,  $Pr_m$ , а также отношения  $k_f/k_b$  пространственных масштабов накачки и среднего поля;
6. Найдена функция распределения интенсивности волнового пакета, прошедшего через протяженную среду с керровской нелинейностью и циклическим усилением, а также выражение для коэффициента эксцесса как безразмерного параметра нелинейности в первом и втором порядках, определяющего её отличие от релеевской.

**Теоретическая и практическая значимость** работы состоит в том, что

- разработана методика определения статистических свойств когерентных вихревых течений, в которых есть нелокальное взаимодействие по масштабам; данный подход может быть использован для определения статистических свойств течений, имеющих отличную от рассматриваемой конфигурации внешнего поля силы;

- впервые получена структурная функция поля скорости в трехмерном когерентном геострофическом вихре, которая хорошо характеризует стати-

стические свойства течения и может быть измерена в натуральных экспериментах;

- результаты исследования могут быть использованы при проведении расчетных оценок и для улучшения качественного понимания некоторых природных явлений (такие как циклоны и антициклоны, торнадо, смерчи, столбчатые вихри в мантии Земли и т.п.), а также для оптимизации ряда технологических процессов (охлаждение реакторов с жидкометаллическим теплоносителем, камеры сгорания, сушильные установки и т.д.);

- вычисленная функция распределения интенсивности волнового пакета свидетельствует о малом отличии статистики интенсивности выходящего сигнала от релейской, что говорит о низкой вероятности "выбросов" в такой системе. Эти результаты могут быть использованы для создания волоконных линий сверхдальней связи, а также для оптимизации технологических процессов, связанных со случайными волоконными лазерами.

**Достоверность результатов** диссертационной работы обеспечивается физически обоснованными, непротиворечивыми математическими моделями гидродинамики несжимаемой жидкости и уравнением Навье-Стокса, нелинейным уравнением Шредингера, аппаратом теории турбулентности, волновой кинетической теории, магнитной гидродинамики и статистической физики, аппаратом уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений, аппаратом математического анализа, интегрального исчисления и теории вероятности, аппаратом диаграммной техники Уайльда, приближенными методами аналитических вычислений и асимптотик, хорошей согласованностью найденных зависимостей с натурными и численными экспериментами. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- С.С. Вергелес, Л.Л. Огородников, В.В. Лебедев, И.В. Колоколов, «Статистика интенсивности в случайном волоконном лазере», VII Международная конференция по фотонике и информационной оптике, Москва, 24-26 января 2018. Сб. научных трудов, с. 184-185 (2018).

- L.L. Ogorodnikov, S.S. Vergeles, V.V. Lebedev, «Intensity Statistics of the Emission of Raman Random Fiber Laser», Optics, Photonics and Lasers: Proc.

1st International Conference on Optics, Photonics and Lasers (OPAL' 2018), 9-11 May 2018, Barcelona, Spain, p. 257-260 (2018), WoS: 000454436200075.

- Л.Л. Огородников, С.С. Вергелес «Структура и пространственные корреляции столбчатых когерентных вихрей в трехмерной вращающейся жидкости», XV Международная конференция «Забабахинские научные чтения», г. Снежинск, 27 сентября – 1 октября 2021.

- Л.Л. Огородников, Вергелес С.С., Лебедев В.В. «Статистика интенсивности выходного излучения случайного волоконного лазера», XVIII Научная школа «Нелинейные волны-2018», г. Нижний Новгород, 26 февраля - 4 марта 2018.

- Вергелес С.С., Огородников Л.Л. «Поведение когерентных вихрей в трехмерной жидкости», Международная конференция «XXI Харитоновские тематические научные чтения», г. Саров, 15 – 19 апреля 2019 г.

- L.L. Ogorodnikov, S. S. Vergeles «Study of correlation properties of a three-dimensional coherent vortex», Самарские чтения (в память об академике А.А. Самарском), Москва, 22-25 декабря 2021 г.

- Vergeles S.S., Ogorodnikov L.L. «Coherent columnar vortex in three-dimensional rotating turbulent flow: structure and spatial correlations», IV Russian Conference on Magnetohydrodynamics, September 20 – 22, 2021, Perm, Russia

- Л.Л. Огородников, С.С. Вергелес « $\alpha$ -эффект в магнитном поле в присутствии трехмерного когерентного вихревого течения проводящей жидкости», XX Научная школа «Нелинейные волны – 2022», г. Нижний Новгород, 7-13 ноября 2022.

Личный вклад заключается в участии в формулировке темы диссертационной работы, проведении аналитических исследований, обсуждении и интерпретации полученных результатов, подготовке материалов к публикации.

Таким образом, в результате выполнения научно-квалификационной работы решена важная научная задача, связанная с исследованием статистических свойств когерентных вихревых и волновых течений, которая может быть использована в интересах прогнозирования ряда природных явлений (в том числе катаклизмов), оптимизации передачи сигналов на дальние расстояния и интенсификации технологических процессов.

**Публикации.** По теме диссертации **опубликованы** 3 печатные работы в статьях [5], [48], [49], 3 из которых входят в перечень WoS, и 10 работ в материалах конференций.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации 172 страницы текста с 15 рисунками. Список литературы содержит 155 наименований.

## Содержание работы

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, приводится общая характеристика работы, формулируется цель работы и решаемые задачи для её достижения, отмечаются её научная новизна, теоретическая и практическая значимость, обосновывается достоверность полученных результатов и личный вклад автора в работу, приводятся научные положения, выдвигаемые на защиту.

**В первой главе** диссертации содержится литературный обзор по теме научного исследования. Рассматриваются различные режимы течений жидкости от ламинарного до развитого турбулентного вихревого движения. Приводятся примеры течений в форме трехмерных когерентных столбчатых вихрей. Отмечается их позитивная и негативная роль в ряде природных и технологических процессов.

Рассматриваются способы описания вихревых течений, отмечается сложность получения точного решения уравнения Навье-Стокса для таких движений и обосновывается необходимость статистического способа их описания, в том числе, с использованием корреляционных функций. Излагаются ключевые предпосылки для построения теории трехмерных когерентных географических вихрей при постоянной температуре, развитой в [5], приводятся уравнение на среднюю компоненту поля скорости, а также уравнение на турбулентные пульсации. Далее в обзоре освещается важность исследования влияния трехмерного когерентного вихревого течения проводящей жидкости на внешнее магнитное поле. Проводится анализ области значений магнитных чисел Прандтля, которые уместно рассматривать на практике для решения поставленной задачи. Обсуждается связь  $\alpha$ -эффекта, выраженного количественно в виде матрицы пропорциональности между компонентами электро-

движущей силы, возникающей за счет турбулентного течения проводящей жидкости в магнитном поле, и компонентами самого магнитного поля, с преобразованием тороидального магнитного поля в полоидальное. Указывается, что  $\alpha$ -эффект возможен в течении с дифференциальным вращением и нарушением зеркальной симметрии, а такое спиральное течение может быть создано искусственно. В обзоре анонсируется, что величина  $\alpha$ -эффекта трехмерного когерентного вихря проводящей жидкости вычисляется в области малых чисел  $Ek$ ,  $Ro$  и  $Pr_m$  в третьей главе. В обзоре также говорится о важности исследования статистических свойств течений в другом предельном случае, когда амплитуда флуктуаций становится сравнимой с величиной среднего течения. В качестве одного из классов таких нелинейных систем рассматриваются системы, описываемые нелинейным уравнением Шредингера, которое может быть использовано для описания как волн на глубокой воде, так волн в оптоволокне. Обсуждаются способы статистического исследования активных волновых систем с циклическим усилением, к которым относится случайный волоконный лазер с обратной связью. Делается вывод о возможности применения волновой кинетической теории, описанной в [46] на примере случайного волоконного лазера, для исследования таких систем.

**Во второй главе** изложен подход, позволяющий количественно описывать статистические свойства турбулентных течений и, в частности, трехмерных когерентных геострофических вихревых течений при постоянной температуре.

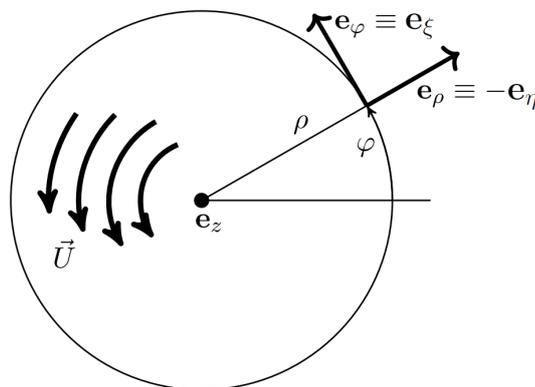


Рис. 1 — Профиль скорости трехмерного когерентного вихря

Предполагается возможным разделение течения на средний крупномасштабный поток  $\mathbf{U}$  и турбулентные пульсации  $\mathbf{u}$ . Задача решается в пределе большого числа Рейнольдса  $Re$ , малых чисел Россби  $Ro$  и Экмана

$Ek \ll Ro$ . Влияние конвекции учитывается в виде модельного случайного поля внешних сил, которое считается равномерно распределенным в объеме. Статистика этих сил, передающих энергию вихрю, изотропна, предполагается скоррелированной на малых временах и на конечном пространственном масштабе  $\sim k_f^{-1}$ . Излагается методика вычисления корреляционных функций, описывающих статистические свойства течения. Данная методика реализована на примере вычисления одноточечной парной корреляционной функции турбулентных пульсаций поля скорости  $\langle u_\xi u_\eta \rangle$ , которая содержится в выражении для тензора Рейнольдса и позволяет определить профиль среднего течения:

$$\langle u_\xi u_\eta \rangle = -\frac{\epsilon}{|\Sigma|} \int (d^3k) k \chi(k) \int_0^\infty d\tau \frac{k_\xi k'_\eta(\tau)}{k'^3(\tau)} e^{-\Gamma(\tau)} \approx \frac{\epsilon}{\Sigma} \quad (1)$$

Вычисления  $\langle u_\xi u_\eta \rangle$  проведены в предположении о том, что локальный коэффициент сдвига  $\Sigma$  не зависит от координат на характерных пространственных масштабах инерционных волн. Данное предположение оказывается самосогласованным и позволяет получить средний профиль скорости течения. Величина коэффициента сдвига трехмерного когерентного вихря определяется мощностью  $\epsilon$  поля внешних сил  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ , которое может иметь конвективную природу, и кинематической вязкостью  $\nu$ :

$$\Sigma = \pm \Sigma_0, \quad \Sigma_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}} \quad (2)$$

Для некоторых потоков в атмосфере знак коэффициента сдвига определяет тип течения. В частности, положительная величина коэффициента сдвига соответствует антициклону, отрицательная – циклону [50]. В ходе вычислений показано, что основной вклад в парную корреляционную функцию дают волновые векторы из сектора быстрых осцилляций ( $k_z/k \gtrsim Ro$ ). Выражение для парной корреляционной функции было получено для определенного вида модельной внешней силы с корреляционной функцией поля силы  $\chi(k)$  специального вида, однако развитый формализм позволяет проводить вычисления для поля случайной силы общего вида. Также в данной главе исследуется пространственная статистика турбулентных пульсаций в трехмерном когерентном геострофическом вихре. Проведены вычисления структурной функ-

ции скорость-скорость различных компонент флуктуаций поля скорости  $\mathbf{u}$  на малых пространственных масштабах для трехмерных когерентных вихрей:

$$S^{ij}(\mathbf{r}) = \langle (u^j(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) - u^j(\mathbf{r}')) (u^i(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) - u^i(\mathbf{r}')) \rangle, \quad (3)$$

где по  $\mathbf{r}'$  предполагается усреднение. С учетом этого определения вычислены компоненты структурной функции поля скорости в трехмерном когерентном геострофическом вихре, имеющие следующий вид в цилиндрических координатах:

$$S^{\varphi\varphi} = S^{zz} \approx \frac{S^{ii}}{2} \sim \frac{\epsilon k_f^2}{2|\Sigma|} (\ln \tau_* \cdot (\rho\delta\varphi)^2 + \tau_*^2 \delta\rho^2 + \varsigma \tau_* \rho\delta\varphi \cdot \delta\rho + \ln^2 \tau_* \cdot \delta z^2); \quad (4)$$

$$S^{\rho\rho} \sim \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} ((\rho\delta\varphi)^2 + \varsigma \cdot \rho\delta\varphi \cdot \delta\rho + \ln^2 \tau_* \cdot \delta\rho^2 + \ln \tau_* \cdot \delta z^2), \quad (5)$$

$$S^{\rho\varphi} \sim -\varsigma \frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} ((\rho\delta\varphi)^2 + \varsigma \ln \tau_* \cdot \rho\delta\varphi \cdot \delta\rho + \tau_* \delta\rho^2 + \delta z^2), \quad (6)$$

$$S^{\varphi z} \sim -\frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\rho\delta\varphi\delta z - \varsigma \cdot \delta\rho\delta z), \quad S^{\rho z} \sim -\frac{\epsilon k_f^2}{|\Sigma|} (\varsigma\rho\delta\varphi\delta z + \ln^2 \tau_* \cdot \delta\rho\delta z), \quad (7)$$

где  $\epsilon$  — мощность накачки,  $\varsigma = \text{sign}(\Sigma)$ ,  $\tau_* = (\text{Ro}/\text{Ek})^{1/3}$  — безразмерный параметр, соответствующий характерному времени, определяемому “вязкой экспонентой”.

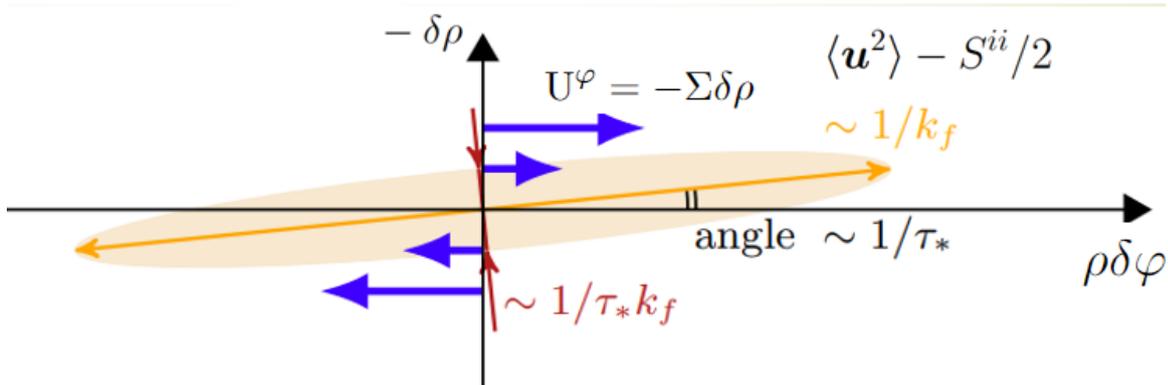


Рис. 2 — Разность следа структурной функции и одноточечного коррелятора турбулентных пульсаций трехмерного когерентного геострофического вихря в проекции на горизонтальную плоскость. Синими стрелками показано направление сдвигового течения, оранжевым цветом изображена область, в которой функция  $\langle \mathbf{u}^2 \rangle - S^{ii}/2$  наиболее существенна.

На рисунке 2 видно, что проекция на горизонтальную плоскость области, в которой разность следа структурной функции турбулентных пульсаций поля скорости в трехмерном когерентном геострофическом вихре и одноточечного коррелятора оказывается существенным, анизотропна с отношением длин сторон  $\sim \tau_*$  и ориентирована под малым углом  $\sim 1/\tau_*$  к азимутальному направлению.

С учетом свойств двумерных флуктуаций [5], [51] посчитаны структурные функции различных компонент поля скорости турбулентных пульсаций в двумерном когерентном вихре в зависимости от мощности накачки и вязкости среды. Сравнение показало, что в трехмерном когерентном вихревом течении структурная функция имеет более анизотропный вид, чем в двумерном когерентном течении.

**Третья глава** посвящена рассмотрению вопросов генерации магнитного поля в вихревом потоке проводящей жидкости для случая малых магнитных чисел Прандтля  $Pr_m \lesssim 1$ . В частности, рассмотрен  $\alpha$ -эффект, связанный с тем, что турбулентный характер вихревого потока приводит к преобразованию тороидального магнитного поля в полоидальное, которое в свою очередь приводит к возникновению электродвижущей силы. В данной главе исследован  $\alpha$ -эффект для трехмерного когерентного геострофического вихря с ненулевой спиральностью в проводящей жидкости. С использованием модели трехмерного когерентного вихря найдены компоненты одноточечного коррелятора скорость-завихренность. В присутствии такого когерентного вихря в проводящей жидкости рассмотрено поведение магнитного поля, амплитуда которого изначально была мала и определялась тепловыми флуктуациями. Показано, что связь между компонентами электродвижущей силы  $\mathcal{E}$  и магнитного поля  $\overline{\mathbf{B}}$  линейная:  $\mathcal{E}^i = \alpha_{ip} \overline{B}_p$ , а также получено выражение для всех элементов псевдотензора  $\hat{\alpha}$  в трехмерном когерентном вихревом течении проводящей жидкости в зависимости от величин вязкости, магнитной диффузии, угловой скорости вращения и коэффициента сдвига, то есть в зависимости от чисел  $Ro$ ,  $Ek$  и  $Pr_m$ . Определена связь между псевдотензором  $\hat{\alpha}$  и тензором  $\hat{H}$ , элементы которого являются корреляторами различных компонент скорости и завихренности:

$$\alpha_{ip} = \frac{\kappa k_f^2}{2\Omega^2} \int (d^3k) \frac{k^4}{k_z^2 + (k/\tau_\Omega)^6} (H_{ip} + H_{pi} - H\delta^{ip})_{\mathbf{k}}, \quad (8)$$

где используется безразмерное отношение  $\tau_\Omega = (2\Omega/\kappa k_f^2)^{1/3} = (\text{Pr}_m/\text{Ek})^{1/3}$ , характеризующее отношение скорости вращения  $\Omega$  к величине магнитной диффузии  $\kappa k_f^2$ . Найдено выражение для элементов псевдотензора  $\hat{\alpha}$  в практически важной области параметров  $\text{Ek} \ll \text{Ro} \lesssim 1$ ,  $\text{Pr}_m \lesssim 1$  в зависимости от различных соотношений между этими параметрами:

$$\hat{\alpha} \sim -\frac{\epsilon_h}{\Sigma^2} \text{Ro} \begin{pmatrix} \tau_*^2 & \varsigma \tau_* & 0 \\ \varsigma \tau_* & \beta_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{zz} \end{pmatrix}, \quad \text{Ro} \ll \text{Pr}_m \quad (9)$$

$$\hat{\alpha} \sim -\frac{\epsilon_h}{\Sigma^2} \text{Ro} \begin{pmatrix} \tau_\Omega^2 \beta_{zz} & \varsigma \tau_\Omega & 0 \\ \varsigma \tau_\Omega & \beta_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{zz} \end{pmatrix}, \quad \text{Ek} \ll \text{Pr}_m \ll \text{Ro} \quad (10)$$

$$\hat{\alpha} \sim -\frac{\epsilon_h}{|\Sigma| \kappa k_f^2} \begin{pmatrix} \ln \tau_* & \varsigma & 0 \\ \varsigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ln \tau_* \end{pmatrix}, \quad \text{Pr}_m \ll \text{Ek} \ll \text{Ro} \quad (11)$$

где  $\beta_{\varphi\varphi} = -\ln(\text{Ro}(1 + \kappa k_f^2/|\Sigma|))$ ,  $\beta_{zz} = \text{Ro}/\text{Pr}_m$  в пределе  $\text{Ro} \ll \text{Pr}_m$ ;  $\beta_{\varphi\varphi} = -\ln(\text{Pr}_m(1 + \kappa k_f^2/|\Sigma|))$ ,  $\beta_{zz} = \ln(\text{Ro}/\text{Pr}_m)$  в пределе  $\text{Pr}_m \ll \text{Ro}$ .

На основании результатов сделан вывод о характере влияния коэффициента магнитной диффузии и угловой скорости вращения на величину  $\alpha$ -эффекта.

Также получено уравнение эволюции среднего магнитного поля в трехмерном когерентном геострофическом вихре и найден критерий его неустойчивости во времени, то есть роста величины среднего магнитного поля, в зависимости от величины чисел  $\text{Ro}$ ,  $\text{Ek}$ ,  $\text{Pr}_m$ , а также отношения масштаба накачки к масштабу среднего магнитного поля  $k_f/k_b$ :

$$\frac{\text{Ek}}{\text{Pr}_m} \lesssim \text{Ro}^2 \text{Pr}_m \left( \frac{k_f}{k_b} \right)^3, \quad \text{Ek} \ll \text{Pr}_m \quad (12)$$

$$\left( \frac{\text{Ek}}{\text{Pr}_m} \right)^2 \lesssim \text{Ro}^2 \text{Pr}_m \left( \frac{k_f}{k_b} \right)^3, \quad \text{Ek} \gg \text{Pr}_m. \quad (13)$$

Заключительная **четвертая глава** посвящена исследованию статистики другого предельного случая течения, когда флуктуации нельзя считать малыми по сравнению со средним течением. Такие системы становятся нелинейными и в ряде случаев могут описываться нелинейным уравнением Шредингера с усилением:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - g\right)\psi = i\frac{\beta_2}{2}\partial_t^2\psi - i\gamma|\psi|^2\psi, \quad (14)$$

где  $\beta_2$  — коэффициент дисперсии оптоволокна,  $g$  — коэффициент усиления сигнала,  $\gamma$  — параметр Керровской нелинейности. Особый интерес среди них представляет исследование активных циклических волновых систем, в частности, случайного волоконного лазера с распределенной обратной связью. В такой системе, поведение которой описывается в рамках волновой кинетической теории, развитой в [46], определена функция распределения интенсивности волнового пакета на примере излучения, прошедшего через случайный волоконный лазер:

$$\mathcal{F}(I) = \left(1 + \frac{(I/\bar{I})^2 - 4(I/\bar{I}) + 2}{2}K\right) \exp(-I/\bar{I}) \quad (15)$$

В первом и втором порядках по параметру нелинейности  $\gamma l_D \bar{I}$  найдено выра-

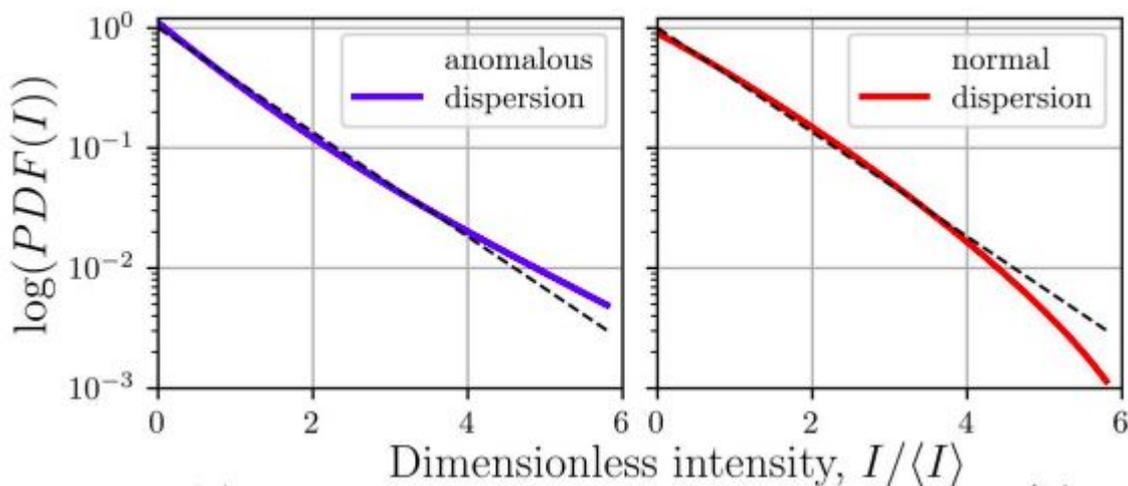


Рис. 3 — График функции распределения интенсивности выходного излучения случайного волоконного лазера при  $|K| = 0.2$ . На рис. 3(a) приведен график для аномальной дисперсии ( $\beta_2 < 0$ ), на рис. 3(b) приведен график для нормальной дисперсии ( $\beta_2 > 0$ ).

жение для коэффициента эксцесса  $\mathcal{K}$  как безразмерного параметра, определяющего отличие статистики интенсивности выходного излучения от релеевской. В главном порядке по параметру нелинейности при конечном усилении  $\epsilon = |gl_D|$  выражение для коэффициента эксцесса будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{K} \approx K = -\frac{4\gamma\bar{I}}{\beta_2\Delta^2} \int (d\omega)(d\omega_1)(d\omega_2) f(\omega - \omega_1) f(\omega - \omega_2) f(\omega) \frac{\omega_1\omega_2}{(2\epsilon)^2 + \omega_1^2\omega_2^2} \quad (16)$$

где  $\omega, \omega_{1,2}$  — частоты, обезразмеренные на ширину спектра  $\Delta$ ,  $f(\omega) = \bar{I}^{-1} \int dt \langle \psi(L, t' + t) \psi^*(L, t') \rangle \exp(i\Delta\omega t)$  — безразмерный спектр выходного излучения. Отметим, что знак куртозиса (коэффициента эксцесса  $K$ ) противоположен знаку коэффициента дисперсии  $\beta_2$ .

Во втором порядке по параметру нелинейности были посчитаны выражение для коэффициента эксцесса будет иметь следующий вид в пределе нулевого усиления:

$$\begin{aligned} \delta K_0 = & - (2\gamma l_D \bar{I})^2 \int \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} f^2(\omega') \frac{f^2(\omega', \omega) - f^2(\omega')}{\omega^2} + \\ & + (\gamma l_D \bar{I})^2 \int \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \frac{f^2(\omega, \omega')}{\omega^2} \cdot \\ & \cdot \left[ 6(\delta \tilde{f}(\omega', \omega))^2 - (\delta f(\omega', \omega))^2 - \delta^2 f(\omega', \omega) (\delta^2 f(\omega', \omega) + 4f(\omega')) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где используются обозначения  $f^2(\omega', \omega) = f(\omega' + \omega)f(\omega' - \omega)$  и  $\delta^2 f(\omega', \omega) = f(\omega' + \omega) + f(\omega' - \omega) - 2f(\omega')$  применительно к функции  $f$ ,

$$\tilde{f}(\omega) = \text{v.p.} \int \frac{d\omega_1}{\pi} \frac{f(\omega + \omega_1)}{\omega_1}, \quad (18)$$

а также обозначение  $\delta \tilde{f}(\omega', \omega) = \tilde{f}(\omega' + \omega) - \tilde{f}(\omega' - \omega)$  применительно к функциям  $f$  и  $\tilde{f}$ .

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. получены соотношения для описания турбулентных пульсаций в присутствии сильного вращения и сдвигового течения при постоянной температуре, а также установлены свойства структурной функ-

- ции турбулентных пульсаций внутри трехмерного когерентного геострофического вихря на малых масштабах;
2. посчитана структурная функция различных компонент турбулентных пульсаций поля скорости на малых масштабах для трехмерного и двумерного когерентных вихревых течений при постоянной температуре в зависимости от мощности накачки и вязкости среды; установлено, что в трехмерном когерентном вихревом течении структурная функция имеет более анизотропный характер, чем в двумерном;
  3. показано, что основной вклад в корреляционную и структурную функции скорость-скорость дают волновые векторы из сектора быстрых осцилляций;
  4. аналитически исследован  $\alpha$ -эффект в трехмерном когерентном геострофическом вихре проводящей жидкости, вычислены элементы матрицы  $\alpha$ -эффекта в течении с ненулевой спиральностью при различных числах Россби, Экмана и магнитного числа Прандтля в области их значений  $Ek \ll Ro \lesssim 1$  и  $Pr_m \lesssim 1$ ;
  5. установлено, что величина  $\alpha$ -эффекта в трехмерном когерентном вихревом течении проводящей жидкости существенно зависит от соотношения между числом Россби и магнитным числом Прандтля; в частности, показано, что величина  $\hat{\alpha}$  уменьшается с ростом угловой скорости  $\Omega$  при  $Ek \ll Pr_m$  и не зависит от угловой скорости при  $Ek \gg Pr_m$ , а также слабо зависит от коэффициента магнитной диффузии  $\kappa$  в пределе  $Ro \ll Pr_m$  и убывает с ростом  $\kappa$  в случае  $Ro \gg Pr_m$ ;
  6. для кинематической стадии установлен критерий неустойчивости среднего магнитного поля, возникающего за счет течения спиральной проводящей жидкости трехмерного когерентного геострофического вихря, записанный в терминах безразмерных параметров течения  $Ro, Ek, Pr_m$ , а также отношения масштаба среднего магнитного поля к масштабу накачки  $k_b/k_f$ ;
  7. определена функция распределения интенсивности волнового пакета на примере излучения, прошедшего через случайный волоконный лазер, в виде  $\mathcal{F}(I) = (1 + K [(I/\bar{I})^2 - 4I/\bar{I} + 2] / 4) e^{-I/\bar{I}}$ , а также

в первом и втором порядках по параметру нелинейности  $\gamma l_D \bar{I}$  найдено выражение для коэффициента эксцесса  $\mathcal{K}$  как безразмерного параметра, определяющего отличие статистики интенсивности выходного излучения от релеевской;

8. полученные результаты могут быть использованы для выбора постановки численных и экспериментальных исследований, анализа и прогнозирования в будущем некоторых природных явлений и технологических процессов.

В заключении отмечено, что полученные в работе результаты с использованием статистического подхода позволяют лучше понять природу когерентных вихревых и волновых течений, а также могут быть использованы для выбора постановки численных и экспериментальных исследований, анализа и прогнозирования в будущем некоторых природных явлений и технологических процессов.

## Список литературы

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика, учебное пособие в 10 т., т. VI Гидродинамика, 3е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. (736 с.), 1968.
2. *Rott N.* Note on the history of the Reynolds number // Annual review of fluid mechanics. — 1990. — Т. 22, № 1. — С. 1—12.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том V. Статистическая физика, часть 1 // книга. — 1976.
4. *Kolokolov I. V., Lebedev V. V.* Velocity statistics inside coherent vortices generated by the inverse cascade of 2-D turbulence // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — Т. 809.
5. *Kolokolov I. V., Ogorodnikov L. L., Vergeles S. S.* Structure of coherent columnar vortices in three-dimensional rotating turbulent flow // Physical Review Fluids. — 2020. — Т. 5, № 3. — С. 034604.
6. *Staley D., Gall R.* Hydrodynamic instability of small eddies in a tornado vortex // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1984. — Т. 41, № 3. — С. 422—429.

7. Force balance in rapidly rotating Rayleigh–Bénard convection / A. J. A. Guzmán [и др.] // Journal of fluid mechanics. — 2021. — Т. 928. — A16.
8. *Schubert G.* Treatise on geophysics. — Elsevier, 2015.
9. *Митрофанова О. В., Подзоров Г. Д., Токарев Ю. Н.* Моделирование магнитогидродинамических эффектов при генерации крупномасштабных вихреобразований в жидкометаллическом теплоносителе // Теплофизика высоких температур. — 2015. — Т. 53, № 3. — С. 430–440.
10. *Рачков В. И., Сорокин А. П., Жуков А. В.* Теплогидравлические исследования жидкометаллических теплоносителей в ядерных энергетических установках // Теплофизика высоких температур. — 2018. — Т. 56, № 1. — С. 121–136.
11. *Колмогоров А.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады Академии Наук. — 1941. — Т. 30, вып. 4. — С. 299–303.
12. *Boffetta G., Ecke R. E.* Two-dimensional turbulence // Annual review of fluid mechanics. — 2012. — Т. 44. — С. 427–451.
13. *Kraichnan R. H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence // The Physics of Fluids. — 1967. — Т. 10, № 7. — С. 1417–1423.
14. *Sommeria J.* Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box // Journal of fluid mechanics. — 1986. — Т. 170. — С. 139–168.
15. *Kolokolov I., Lebedev V.* Structure of coherent vortices generated by the inverse cascade of two-dimensional turbulence in a finite box // Physical Review E. — 2016. — Т. 93, № 3. — С. 033104.
16. Dynamics of energy condensation in two-dimensional turbulence / M. Chertkov [и др.] // Physical review letters. — 2007. — Т. 99, № 8. — С. 084501.
17. *Seshasayanan K., Alexakis A.* Condensates in rotating turbulent flows // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — Т. 841. — С. 434–462.
18. *Orlov A. V., Brazhnikov M. Y., Levchenko A. A.* Large-scale coherent vortex formation in two-dimensional turbulence // JETP Letters. — 2018. — Т. 107, № 3. — С. 157–162.

19. *Халатов А. А.* Теория и практика закрученных потоков./Халатов АА АН УССР, Институт технической теплофизики, Киев: Наук. — 1989.
20. *Proudman J.* On the motion of solids in a liquid possessing vorticity // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. — 1916. — Т. 92, № 642. — С. 408—424.
21. *Cavallini F., Crisciani F.* Quasi-geostrophic theory of Oceans and atmosphere: topics in the dynamics and thermodynamics of the Fluid Earth. Т. 45. — Springer Science & Business Media, 2012.
22. *Godeferd F. S., Moisy F.* Structure and dynamics of rotating turbulence: a review of recent experimental and numerical results // Applied Mechanics Reviews. — 2015. — Т. 67, № 3.
23. *Starr V. P.* Physics of negative viscosity phenomena. — 1968.
24. Disentangling inertial waves from eddy turbulence in a forced rotating-turbulence experiment / A. Campagne [и др.] // Physical Review E. — 2015. — Т. 91, № 4. — С. 043016.
25. *Frehlich R., Sharman R.* Estimates of turbulence from numerical weather prediction model output with applications to turbulence diagnosis and data assimilation // Monthly Weather Review. — 2004. — Т. 132, № 10. — С. 2308—2324.
26. *Frehlich R., Kelley N.* Measurements of wind and turbulence profiles with scanning Doppler lidar for wind energy applications // IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing. — 2008. — Т. 1, № 1. — С. 42—47.
27. *Mory M., Hopfinger E.* Structure functions in a rotationally dominated turbulent flow // The Physics of fluids. — 1986. — Т. 29, № 7. — С. 2140—2146.
28. *Zeldovich I. B., Ruzmaikin A. A., Sokolov D. D.* Magnetic fields in astrophysics // New York. — 1983. — Т. 3.
29. *Tobias S.* The turbulent dynamo // Journal of fluid mechanics. — 2021. — Т. 912.

30. *Jones C. A.* Planetary magnetic fields and fluid dynamos // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2011. — Т. 43. — С. 583–614.
31. Turbulent geodynamo simulations: a leap towards Earth’s core / N. Schaeffer [и др.] // Geophysical Journal International. — 2017. — Т. 211, № 1. — С. 1–29.
32. *Subramanian K.* From primordial seed magnetic fields to the galactic dynamo // Galaxies. — 2019. — Т. 7, № 2. — С. 47.
33. *Rüdiger G., Hollerbach R.* The magnetic universe: geophysical and astrophysical dynamo theory. — John Wiley & Sons, 2006.
34. *Moffatt H., Tsinober A.* Helicity in laminar and turbulent flow // Annual review of fluid mechanics. — 1992. — Т. 24, № 1. — С. 281–312.
35. *Parker E. N.* The Formation of Sunspots from the Solar Toroidal Field. // The astrophysical journal. — 1955. — Т. 121. — С. 491.
36. Simulations of the small-scale turbulent dynamo / A. A. Schekochihin [и др.] // The Astrophysical Journal. — 2004. — Т. 612, № 1. — С. 276.
37. Non-stationary screw flow in a toroidal channel: way to a laboratory dynamo experiment / P. Frick [и др.] // Magnetohydrodynamics. — 2002. — Т. 38, № 1/2. — С. 143–162.
38. Specific features of liquid metal heat transfer in a ТОКАМАК reactor. / I. Belyaev [и др.] // Magnetohydrodynamics (0024-998X). — 2013. — Т. 49.
39. Пульсации температуры в МГД-потоке жидкого металла в горизонтальной неоднородно обогреваемой трубе / И. А. Беляев [и др.] // Теплофизика высоких температур. — 2015. — Т. 53, № 5. — С. 773–781.
40. *Zakharov V. E.* Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1968. — Т. 9, № 2. — С. 190–194.
41. *Sulem C., Sulem P.-L.* The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse. Т. 139. — Springer Science & Business Media, 2007.
42. Optical wave turbulence: Towards a unified nonequilibrium thermodynamic formulation of statistical nonlinear optics / A. Picozzi [и др.] // Physics Reports. — 2014. — Т. 542, № 1. — С. 1–132.

43. Random distributed feedback fibre lasers / S. K. Turitsyn [и др.] // Physics reports. — 2014. — Т. 542, № 2. — С. 133—193.
44. *Boltzmann L.* Weitere studien über das wärmegleichgewicht unter gasmolekülen // Kinetische Theorie II. — Springer, 1970. — С. 115—225.
45. *Zakharov V. E.* Turbulence in integrable systems // Studies in Applied Mathematics. — 2009. — Т. 122, № 3. — С. 219—234.
46. Wave kinetics of random fibre lasers / D. V. Churkin [и др.] // Nature communications. — 2015. — Т. 6, № 1. — С. 1—6.
47. *Walczak P., Randoux S., Suret P.* Optical rogue waves in integrable turbulence // Physical review letters. — 2015. — Т. 114, № 14. — С. 143903.
48. *Ogorodnikov L. L., Vergeles S. S.* Structure function of velocity in a geostrophic vortex under strong rotation // Physics of Fluids. — 2022.
49. *Ogorodnikov L. L., Vergeles S. S.* Intensity statistics in a long random fiber Raman laser // Optics letters. — 2018. — Т. 43, № 4. — С. 651—654.
50. Velocity profiles of cyclones and anticyclones in a rotating turbulent flow / V. M. Parfenyev [и др.] // Physics of Fluids. — 2021. — Т. 33, № 6. — С. 065117.
51. *Parfenyev V. M., Vergeles S. S.* Influence of Ekman friction on the velocity profile of a coherent vortex in a three-dimensional rotating turbulent flow // Physics of Fluids. — 2021. — Т. 33, № 11. — С. 115128.