

На правах рукописи

Куликов Юрий Матвеевич

**УСТОЙЧИВОСТЬ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ТЕЧЕНИЙ
ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

Специальность 01.02.05 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук
Сон Эдуард Евгеньевич

Официальные оппоненты: **Головизнин Василий Михайлович**,
доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры вычислительных методов Факультета вычислительной математики и кибернетики, заведующий лабораторией индустриальной математики

Урманчев Саид Федорович,
доктор физико-математических наук, профессор, Институт механики имени Р.Р. Мавлютова – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, главный научный сотрудник лаборатории «Механика многофазных систем»

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Защита состоится 15 мая 2019 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 002.110.03 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Объединённом институте высоких температур Российской академии наук по адресу: 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д.13, стр.2, экспозал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке или на сайте ОИТВ РАН <https://jilt.ru/science/dissert-council/>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д.13, стр.2, ученому секретарю диссертационного совета Д 002.110.03.

Автореферат разослан « » марта 2019 года.
Телефон для справок: +7 (495) 485-79-77.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.110.03,
д-р тех. наук



Директор Леонид Бенцианович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теории устойчивости и турбулентности течений жидкости и газа являются крупными направлениями классической механики. Их развитие — плод упорного труда десятков исследователей, а также результат применения самых современных экспериментальных техник, математических (аналитических и численных) методов. Теория гидродинамической устойчивости является важной частью гидродинамики и призвана ответить на вопрос о реализуемости того или иного течения в природе или лабораторных условиях. Под воздействием различного рода возмущений может развиться неустойчивость, приводящая к смене «регулярного» режима течения (например, от ламинарного к периодическому или квазипериодическому) или же к турбулентности, характеризующейся развитым полем завихренности и широким диапазоном пространственных и временных масштабов. В силу своей чрезвычайной распространённости турбулентные течения стали объектом изучения во множестве статей и монографий. Несмотря на количество предложенных концепций (вихревая вязкость, длина пути перемешивания, модели однородной изотропной турбулентности, турбулентного пограничного слоя, модель на основе шпильковидных вихревых структур, сценарии турбулентного перехода Ландау–Хопфа и Рюэля–Такенса, аналогии с динамическими системами и др.), самостоятельной замкнутой теории этого явления построить так и не удалось.

Помимо изучения исключительно гидродинамических эффектов, существенный пласт занимают задачи, связанные с учётом зависимости некоторых материальных коэффициентов среды от температуры, приводящих к взаимодействию течения и температурного поля. В частности, учёт зависимости плотности от температуры позволяет изучить свободную конвекцию в поле объёмных сил. Анализ устойчивости и теплопереноса в этой задаче привел к многочисленным плодотворным результатам. Аналогичным образом в задачах высокотемпературной гидродинамики крайне важным является учёт температурной зависимости других материальных коэффициентов — теплоемкости и теплопроводности (показателя адиабаты), проявляющих немонотонные свойства в случае развития различных теплофизических процессов — возбуждения внутренних степеней свободы, диссоциации и ионизации.

В этой связи естественным является рассмотрение уединённого влияния вариаций вязкости (вязкой стратификации), возникающих, например, вследствие неоднородности распределения некоторой примеси в течении («активного скаллара») или температурной зависимости. Очевидно, что зависимость вязкости от температуры свойственна всем жидкостям и газам, тем не менее, можно выделить так называемые термовязкие жидкости (ТВЖ), отличительным свойством которых является резкая (зачастую немонотонная) зависимость вязкости жидкости от температуры, проявляющаяся в неоднородных температурных полях. Так как вязкость является коэффициентом переноса импульса, то указанное явление должно проявляться в динамических процессах, таких как сдвиговые течения, течения с развитым конвективным переносом.

К рассматриваемым жидкостям относятся продукты переработки нефти, органические и минеральные масла, жидкая сера и фосфор, растворы полимеров, расплавы силикатов (магматические породы). Примерами процессов, в которых резкая температурная зависимость динамической вязкости играет существенную роль, являются: движение серы в каналах теплообменников и других технических устройств, движение расплавов горных пород как в приповерхностных слоях мантии, так и при извержениях вулканов, течения в маслонаполненном

высоковольтном и нагревательном оборудовании, истечение холодной пресной речной воды в теплое озеро или соленый океан, перегретой воды под высоким давлением в подводных гейзерах.

Таким образом, термовязкие свойства жидкости могут играть существенную роль как в разнообразных геофизических задачах, так и в технических приложениях. Кроме того, они представляют интерес с точки зрения распространения общей турбулентной теории на стратифицированные течения, приводя к разнообразным эффектам, — в частности, к «очаговой» турбулентности. Проведенный обзор показывает, что изучение особенностей течений ТВЖ затрагивает вопросы реологии, теории гидродинамической устойчивости, теплообмена в течениях с развитой завихренностью. Несмотря на существование подробных работ [1—4], исследования в данной тематике трудно считать завершенными.

В частности, большинством исследователей не уделено внимание возможности появления точки перегиба в профиле скорости, которая может наблюдаться в некотором диапазоне определяющих параметров, что делает целесообразным рассмотрение данного течения с позиции теоремы Рэлея (хотя и в присутствии вязкости) и теории гидродинамической устойчивости, в особенности в случае больших градиентов вязкости в стационарном течении. Попытка связать математические особенности термовязкого профиля с классом неустойчивостей идеальной жидкости, а также со свойствами устойчивости течения, явилось отправной точкой предлагаемого исследования. Установленная нами связь характеристик стационарного профиля скорости ТВЖ и областей нейтральной устойчивости сделала актуальным изучение задач смешения с помощью непосредственного моделирования эволюции течений на основе современных методов вычислительной гидродинамики, призванных дать ответ на вопрос о связи формы профиля скорости с областями наиболее интенсивного развития возмущений, крупномасштабного смешения и характеристиками турбулентности.

Рассмотренные результаты моделирования влияния резкой температурной зависимости динамической вязкости жидкости на характеристики течений в основном связаны со случаем развитой турбулентности и свободных сдвиговых течений и не рассматривают процесс разрушения основного течения и крупномасштабного смешения, — данное обстоятельство также во многом определило характер решаемых задач.

Степень разработанности темы. Теория гидродинамической устойчивости [5], как и теория турбулентности [6; 7], содержат большое число хорошо разработанных подходов к изучению течений жидкости. Анализ гидродинамических неустойчивостей, приводящих к смене характера режима течения и возникновению турбулентности, тесно сопряжен с экспериментальной практикой и математическим моделированием. Исследованию реологических особенностей термовязких жидкостей, многие из которых являются неньютоновскими, посвящено значительное число публикаций, направленных, в основном, на непосредственное измерение динамической вязкости при различных воздействиях, в том числе тепловых. Обращаясь к истории исследования устойчивости следует отметить одну из наиболее ранних работ — [8], в которой, однако, рассматривался общий случай вязкой стратификации без указания связи динамической вязкости с температурой. После существенного перерыва анализ устойчивости ТВЖ был продолжен в серии работ [1—3] для различных аппроксимаций вязкости.

В России исследования в этом направлении связаны с работами С.Ф. Урманчеева и его коллег [4; 9], исследовавших общие свойства, а также устойчивость течений ТВЖ, в том числе аномально термовязких.

Математическое моделирование течений ТВЖ в основном сосредоточено на задачах свободных сдвиговых течений или однородной изотропной турбулентности, в которых проводится анализ временного развития слоя смешения, влияния вариаций вязкости на скорость диссипации и крупномасштабную структуру течения.

Объектом исследования выступают сдвиговые течения ньютоновской термовязкой жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры.

Целью данной работы является теоретическое исследование характеристик устойчивости, а также процессов турбулентного смешения в сдвиговых течениях термовязкой жидкости.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. определить характеристики скоростного профиля в установившемся течении модельной ТВЖ, а также длину его установления;
2. определить области устойчивости найденного профиля по отношению к малым возмущениям на основе уравнения Орра–Зоммерфельда, обобщённого на рассматриваемый класс термовязких жидкостей;
3. создать программную реализацию численного метода КАБАРЕ для моделирования плоских и трёхмерных течений в приближении слабой сжимаемости;
4. выполнить валидацию метода КАБАРЕ на основе расчёта двойного сдвигового слоя и течения Тейлора–Грина;
5. провести численное моделирование развития неустойчивости в напорном течении ТВЖ в канале, а также в слоистом течении ТВЖ;
6. выполнить численное моделирование режимов течения ТВЖ в трёхмерной постановке, провести анализ характеристик теплообмена в реализующихся течениях.

Научная новизна:

1. впервые показана возможность изменения выпуклости стационарного профиля скорости в ТВЖ при изменении перепада температур;
2. предложено дополнительное ветвление алгоритма численного метода КАБАРЕ на этапе расчёта значений локальных инвариантов Римана на новом временном слое;
3. для турбулентного течения Тейлора–Грина получены взаимные корреляционные функции давления и квадрата завихренности, а также взаимные корреляции их пульсационных компонент;
4. показано, что при эволюции двойного вихревого слоя слабосжимаемой жидкости вклад дилатационной компоненты диссипации в энергетические характеристики течения сопоставим с общей диссипацией;
5. впервые проведено численное моделирование эволюции плоского течения ТВЖ под воздействием гармонических возмущений малой амплитуды в канале, показано, что процесс смешения наиболее интенсивным образом развивается в окрестности точки перегиба профиля скорости;
6. расчётом по схеме КАБАРЕ плоского слоистого течения ТВЖ показано, что возможность и интенсивность процесса смешения находятся в функциональной зависимости от безразмерного комплекса, в состав которого входят число Рейнольдса и отношение динамических вязкостей жидкостей в различных слоях;
7. впервые проведено моделирование эволюции течения термовязкой жидкости в трёхмерном слое под воздействием хаотических возмущений.

Практическая значимость предлагаемого исследования связана с выявлением решающего влияния температурной зависимости вязкости жидкости не только на распределение скорости в некотором установившемся течении, но также и на его устойчивость, что может привести к смене режима течения и изменению характера теплообмена. Результаты указывают на необходимость учёта температурной зависимости вязкости при проведении моделирования течений жидкости и газа.

Расширен опыт применения схемы КАБАРЕ, реализованной в приближении слабой сжимаемости, в двумерной и трёхмерной постановках, что позволяет судить о результативности данного метода для расчёта сдвиговых неустойчивостей, вихревых течений, турбулентности и связанных с ними процессов теплообмена.

Теоретическая значимость. Результаты изучения характеристик крупномасштабного вовлечения и последующего перемешивания слоёв жидкости с различной температурой призваны расширить представления о турбулентности, возникающей в течениях со стратификацией материальных параметров, в частности, с вязкой стратификацией в неоднородном температурном поле.

Методология и методы исследования. Основными теоретическими методами, использованными в настоящей работе, являются: линейная теория гидродинамической устойчивости, численные методы решения задач на собственные значения, метод КАБАРЕ интегрирования уравнений переноса, развитый в работах В.М. Головизнина и его коллег [10; 11], спектральные и статистические подходы турбулентной теории, на основе которых была реализована фильтрация полученных массивов данных.

Численные методы были реализованы на языке программирования Fortran F90 с использованием технологий параллельного программирования MPI, OpenMP, библиотек Intel MKL, LAPACK.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. для термовязкой жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры показано, что существует безразмерный параметр α , определяющий форму профиля скорости в установившемся течении, возможность изменения его выпуклости, связанную с появлением точки перегиба, длину установления этого профиля и область его устойчивости по отношению к бесконечно малым возмущениям. В области значений α , соответствующих диапазону существования точки перегиба, происходит расширение зоны неустойчивости в сторону физически малых чисел Рейнольдса Re и коротковолновых возмущений;
2. развитие процесса смешения в слоистом течении термовязкой жидкости определяется безразмерным параметром $k_t = Re/R_v$, где R_v — отношение вязкостей слоёв; если k_t превышает некоторое критическое значение, то процесс смешения полностью подавляется. Основные асимптотики данного процесса согласуются с результатами теории пограничного слоя;
3. крупномасштабное смешение в течении ТВЖ в плоском канале под воздействием гармонических возмущений развивается наиболее интенсивно в окрестности точки перегиба профиля скорости невозмущённого течения и пространственно отделено от других областей течения;
4. эволюция течения слабосжимаемой ТВЖ в трёхмерном слое зависит от интенсивности налагаемых хаотических возмущений и среднемассового числа Re — при малых Re происходит перестройка течения с исчезновением точки перегиба и увеличением расходных характеристик; в случае больших Re происходит резкая турбулизация течения с возникновением

сильной очаговой турбулентности, сохраняющейся на длительных временах эволюции течения;

5. программная реализация численного метода КАБАРЕ на основе приближения слабой сжимаемости для расчёта течений в двумерной и трёхмерной постановках.

Достоверность полученных результатов обеспечивается: обоснованностью использованных методов теории устойчивости и вычислительной гидродинамики; совпадением результатов моделирования ряда задач классической гидродинамики с имеющимися решениями; соответствием наблюдаемых характеристик теплообмена общим закономерностям течений с развитой завихренностью.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международных и российских конференциях:

1. Eighth International Topical Team Workshop on Two-Phase Systems for Ground and Space Applications, Center of Applied Space Technology and Microgravity, Universität Bremen, Germany, 16–19 September 2013;
2. 2-ая Всероссийская научная конференция «Механика наноструктурированных материалов и систем», Москва, ИПРИМ РАН, 17–19 декабря 2013 г.;
3. 57-я научная конференция МФТИ, Секция физической механики ФАКИ, Москва — Долгопрудный — Жуковский, 24–29 ноября 2014 г.;
4. 58-я научная конференция МФТИ, Секция физической механики ФАКИ, Москва — Долгопрудный — Жуковский, 23–28 ноября 2015 г.;
5. XXXI International conference on Equations of state for Matter, Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, March 1–6, 2016;
6. 6-я всероссийская научная конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», Москва, ИПРИМ РАН, 15–17 декабря 2015 года;
7. 59-я научная конференция МФТИ, Секция физической механики ФАКИ, Москва – Долгопрудный – Жуковский, 21–26 ноября 2016 г.;
8. 7-ая Международная научная школа молодых учёных «Волны и вихри в сложных средах», Москва, 30 ноября — 2 декабря 2016 г.;
9. 6-я всероссийская научная конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», Москва, ИПРИМ РАН, 16–18 ноября 2016 г.;
10. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, Россия, 20–24 августа 2015 г.;
11. XXXII International Conference on interaction of Intense Energy Fluxes with Matter Elbrus, Russia, March 1–6, 2017;
12. Международный Симпозиум «Неравновесные процессы в сплошных средах» в рамках Пермского Естественного Научного Форума, ПГНИУ, Пермь, Россия, 15–17 мая 2017 г.;
13. Видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ– ИТПМ СО РАН– СПбПУ– НИИМ МГУ, 27 июня 2017 г.;
14. VI Всероссийская Конференция с Международным Участием «Теплообмен и Гидродинамика в Закрученных Потоках», Новосибирск, Россия, 21–23 ноября 2017 г.;
15. 60-я научная конференция МФТИ, Секция физической механики ФАКИ, Москва — Долгопрудный — Жуковский, 20–28 ноября 2017 г.;

16. XXIII Международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность», Звенигород, Россия, 25 февраля — 4 марта 2018 г.;
17. 61-я научная конференция МФТИ, Секция физической механики ФАКИ, Москва — Долгопрудный — Жуковский, 19–25 ноября 2018 г.

Личный вклад. Разработка программного кода, его верификация и валидация проведены автором. Постановка задач, а также анализ результатов, представленных в настоящем диссертационном исследовании, проведены коллективом соавторов при определяющем участии автора.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 25 печатных изданиях, 9 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК и индексируемых в системах цитирования *Web of Science* и *Scopus*, 16 — в тезисах докладов.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, кратко освещена степень разработанности темы, сформулирована цель, поставлены задачи работы, изложены научная новизна, основные положения, выносимые на защиту, и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** приведен обзор научной литературы, связанной с исследованием турбулентных течений, методов математического моделирования, свойств термовязких жидкостей. В **разделе 1.1** приводится качественное описание свойств турбулентного движения, обсуждаются современные определения турбулентности. Описание развития науки о турбулентности начинается с опытов Рейнольдса, понятия вихревой вязкости Буссинеска и модели турбулентного перемешивания Прандтля. Рассматриваются основные положения теории однородной изотропной турбулентности А.Н. Колмогорова. В продолжение описания моделей с вихревой вязкостью приводятся уравнения k - ε -модели. Обсуждаются основные подходы к моделированию турбулентных течений, — использующие усреднение по Рейнольдсу (RANS), метод крупных вихрей (LES), а также прямое численное моделирование (DNS). Даются оценки характерной вычислительной сложности данных методов при расчёте однородной изотропной турбулентности, сдвиговых течений. Кратко изложены основные недостатки методов RANS, в явном или неявном виде использующих гипотезу Буссинеска. В **разделе 1.2** даётся ряд дополнительных замечаний о моделировании неустойчивости Кельвина–Гельмгольца и трёхмерных вихревых течений. В **разделе 1.3** описываются характерные свойства термовязких жидкостей. Приводятся различные температурные аппроксимации, описывающие поведение минеральных и растительных масел, полимеров, жидкой серы, магматических расплавов (расплавов силикатов). Даются рекомендации по выбору термовязкой жидкости, подходящей для экспериментальных исследований. Проводится обзор исследований течений ТВЖ, а также гидродинамики перемешивания в них.

Во **второй главе** описываются особенности одномерных установившихся движений термовязкой жидкости. В **разделе 2.1** приводится постановка и результаты решения задачи о движении ТВЖ с экспоненциальной зависимостью динамической вязкости $\mu = \mu_0 \exp(\beta(T - T_0)/T_0)$ от температуры, где μ_0 , β , T_0 — определяются экспериментально, в плоском канале шириной L_y , стенки которого имеют различную температуру (T_1 и $T_1 + \Delta T$). При наличии линейного распределения $T = \Delta T/L_y y + T_1$ профиль скорости описывается универсальной

зависимостью вида

$$U(y) = -\frac{C e^{-\alpha y}}{\alpha(-1 + e^\alpha)}(1 - e^{\alpha y} - y + y e^\alpha), \quad (1)$$

где $\alpha = \beta \Delta T / T_0$. Полученная функция совпадает с результатами [3; 9]. На участке, прилегающем к холодной стенке, возможно изменение выпуклости профиля скорости (рис. 1(a)). Для выполнения совокупности условий на существование точки перегиба при $\alpha \neq 0$ необходимо потребовать $\alpha > 1.5936$ — для множества положительных значений и $\alpha < -1.5936$ — для множества отрицательных. В результате, существование точки перегиба для конкретной ТВЖ определяется перепадом температур ΔT .

В разделе 2.2 рассматривается модельная задача о длине установления профиля скорости ТВЖ в плоском канале, когда динамическая вязкость является функцией пространственных координат, а распределение температуры является линейным. Уравнения Навье–Стокса для стационарного течения несжимаемой жидкости процедурой обезразмеривания в предположениях одномерности и отсутствия возвратных движений сводятся к параболизированному уравнению. Оно позволяет получить зависимость длины установления профиля термовязкой жидкости от характерного числа Рейнольдса, которая является функцией параметра α вида $x = A(\alpha) (Re^*)^{-\alpha}$ (рис. 1(б)), с помощью применения интегро-интерполяционного метода, а также итерационной линеаризации Ньютона.

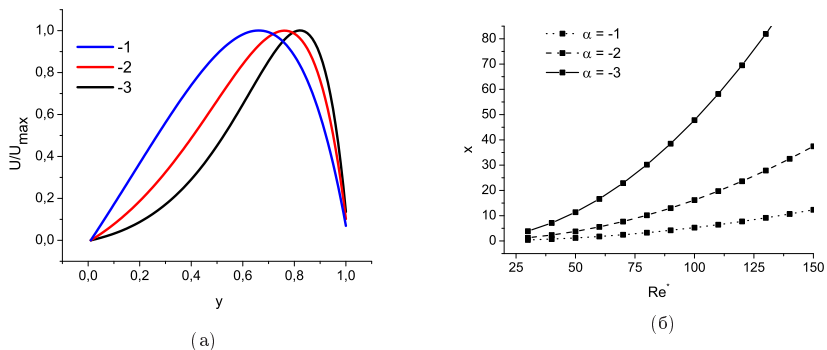


Рис. 1 — Безразмерный профиль скорости при различных значениях α (а); зависимость длины установления течения от числа Рейнольдса (б).

Раздел 2.3 посвящён решению линейной задачи устойчивости ТВЖ в плоском канале. В разделе 2.3.1 проводится обобщение уравнения Орра–Зоммерфельда для ТВЖ с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры. Альтернативный вывод уравнения устойчивости для функции тока возмущения в течении ТВЖ приводится в разделе 2.3.2.

В разделах 2.3.3 и 2.3.4 приведена информация о численных методах решения уравнения Орра–Зоммерфельда. Даётся обзор работ, связанных с устойчивостью ТВЖ и течений со стратификацией вязкости (слоистых течений). В разделе 2.3.4 описана реализация спектрального метода решения уравнения для возмущений, использующего базис полиномов Чебышева для

полученного профиля скорости, с учётом зависимости числа Рейнольдса от локальных характеристик течения. На основе введённого ортогонального базиса проведена дискретизация уравнений и зависимых переменных в точках Чебышева–Гаусса–Лобатто. Проверка численного метода (раздел 2.3.5) и программного кода проводилась для классического течения Пуазейля, полученные результаты для числа членов разложения $N = 100$, показали полное согласие с эталонными решениями — [12].

Обсуждается вопрос о собственных функциях дифференциального оператора уравнения Орра–Зоммерфельда для ТВЖ с точки зрения полноты и ортогональности использованного базиса.

Проведен анализ точности получаемых значений при различном количестве членов разложения. Показано, что относительная ошибка ведет себя немонотонно и имеет минимум в диапазоне $N \in [50, 100]$ (рис. 2(a)). Построена картина кривых нейтральной устойчивости для мнимой части фазовой скорости $c_i < 0$ (рис. 2(б)) для различных значений безразмерного параметра $\alpha < 0$, характеризующего разность температур на верхней и нижней стенках.

Кроме того, была прослежена эволюция наименее устойчивой моды, поведение которой значительно меняется при увеличении $|\alpha|$ для волновых чисел $k = 1, k = 0.5, k = 0.2$. В случае уменьшения значения волнового числа деформация этой собственной функции начинается раньше при увеличении $|\alpha|$, что является следствием перехода c_i через нейтральную кривую в область положительных значений.

В результате расчёта были получены спектральные портреты, существенно отличающиеся от своих аналогов для плоского течения Пуазейля или течения в цилиндрической трубе. Их характерным отличием является отсутствие классических A -, P -, S -ветвей во множестве собственных чисел $|c_i| < 1$. Уменьшение α , т.е. увеличение разности температур стенок, не только уменьшает критическое число Re_c , но и уменьшает устойчивость течения по отношению к коротковолновым возмущениям, в то время как максимальное волновое число на кривых нейтральной устойчивости в работе [3] (рис. 3) меняется относительно слабо.

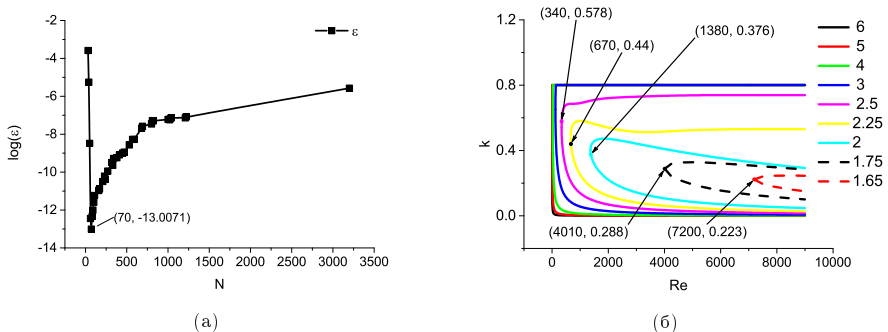


Рис. 2 — Зависимость относительной ошибки от числа членов разложения (а); кривые нейтральной устойчивости при различных Re и $|\alpha|$ (б).

В третьей главе проводится изложение алгоритма схемы КАБАРЕ в приближении слабой сжимаемости в одномерной постановке для течения вязкой теплопроводной жидкости. Для одномерного случая был выполнен расчёт задач

о набегании волны давления на левую границу расчётной области и о выравнивании давления (частный случай задачи о распаде разрыва).

Предложена модификация численного метода КАБАРЕ, касающаяся обработки вариантов значений третьего (и последующих) характеристических чисел, управляющих направлением переноса локальных инвариантов ($\lambda_{3,4} < 0$, $\lambda_{3,4} = 0$, $\lambda_{3,4} > 0$). Для двумерной реализации описана процедура вычисления значений потоковых переменных на основе инвариантов Римана для слабосжимаемой жидкости в граничных точках области. Сформулированы периодические граничные условия, сохраняющие перепад давления в расчётной области в направлении периодичности. Показано, что процесс установления течения вязкой жидкости в канале (течение Пуазейля) в приближении слабой сжимаемости отличается автомодельными свойствами. Отношение между асимптотическим и мгновенным значением продольной скорости на оси течения оказывается независимым от перепада давления Δp , скорости звука c , и связано с особенностями распространения волн давления в продольном направлении расчётной области. Была показана достаточно медленная сходимость течения к своим стационарным значениям на заключительном этапе установления.

В **четвертой главе** описываются результаты моделирования изотермических течений на основе использования схемы КАБАРЕ и приближения слабой сжимаемости. В **разделе 4.1** приводятся основные соотношения для представления течения в терминах завихренности. Указаны различия в эволюции завихренности для двумерных и трёхмерных течений. Введены основные интегральные соотношения для анализа энергетических характеристик течений, а также скорости диссипации кинетической энергии ε , рассчитываемой непосредственным дифференцированием зависимости кинетической энергии, ε_1 , рассчитываемой по интегралу энтропии, вязкой диссипации ε_2 и дилатационной диссипации ε_3 . Вводится понятие палинстрофии, являющейся количественной мерой филаментации и измельчения структуры турбулентности. В **разделе 4.2** рассматривается задача об эволюции плоского двойного сдвигового слоя вследствие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, приводящей к созданию развитого турбулентного течения. На основе анализа интегральных кривых энергии и энтропии, рассчитанных на последовательности сгущающихся сеток, показан процесс сходимости этих зависимостей к точным значениям. Интеграл кинетической энергии (рис. 3(a)), а также скорость её диссипации представляет собой монотонно убывающую функцию, на которую накладываются высокочастотные осцилляции. Установлено, что усреднённое поведение кинетической энергии $E = E(t)$ определяется вязкой диссипацией, тогда как существование колебаний связано с эффектом сжимаемости среды.

Средние значения скорости диссипации $\bar{\varepsilon}$, рассчитанные на участке асимптотического спада хорошо согласуются с результатами теории однородной изотропной турбулентности, связывающей скорость диссипации кинетической энергии с интегральной энтропией. Большие значения числа Рейнольдса $Re = 4 \times 10^5$ в расчёте приводят к тому, что доля диссипации вследствие дилатации оказывается сопоставимой с общими потерями энергии.

Качество моделирования тонких слоёв завихренности определяется значением интеграла палинстрофии (рис. 3(б)). Исследование его поведения на последовательности сеток в широком диапазоне Re показывает хорошее согласие с методами высокого порядка точности [13; 14], а обращение к общей феноменологии позволяет отследить процесс потери точности решения. В частности, на самой мелкой сетке 2048^2 для основной гармоники $m = 1$ он имеет место при $Re \approx 10^6$, а для самой быстрорастущей моды — гораздо раньше —

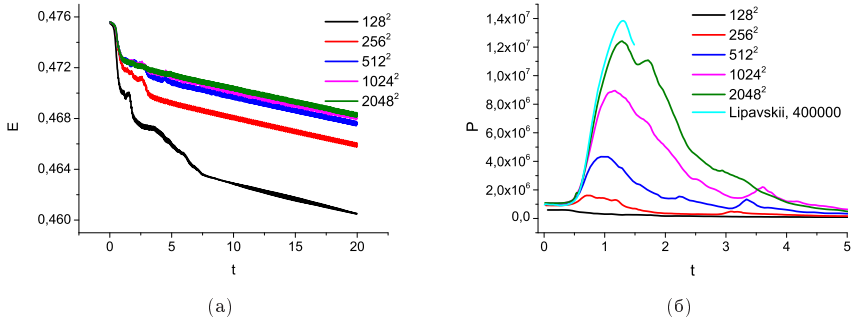


Рис. 3 — (а) — зависимость кинетической энергии от времени, рассчитанная на различных сетках; (б) — зависимость интегральной палинстрофии P от числа ячеек расчётной сетки, сравнение с эталонным решением [13]. Расчёт на сетке 2048^2 , гармоника $m = 1$.

при $Re = 2.5 \times 10^5$. Картины эволюции завихренности при различном сеточном разрешении позволяют отследить явление «недоразрешенности» слоев, связанное с появлением «паразитного» вихря, а также свидетельствуют о правильном отображении черт двумерной турбулентности (рис. 4), обладающей прямым каскадом завихренности от больших вихрей к малым и обратным потоком энергии от малых масштабов к большим.

Показана линейная зависимость времени достижения максимума палинстрофии (рис. 5(a)) от числа Рейнольдса для основной ($m = 1$) и самой вышорастущей гармоник ($m = 6$). С помощью расчёта относительной ошибки показан процесс сечной сходимости схемы по полю завихренности. Реализацию спектральных характеристик двумерной турбулентности подтверждает асимптотическое поведение кинетической энергии и энтропии, которые в инерционном интервале подчиняются закономерностям $E \propto k^{-3}$, $\omega^2/2 \propto k^{-1}$ (рис. 5(б)).

Расчёт инкремента неустойчивости одномодового возмущения по смещению интегральной кривой энтропии для дискретного набора гармоник позволяет удовлетворительно предсказать дисперсионное соотношение в сравнении с методами высокого порядка точности. Расхождение полученных результатов, вероятно, связано с отличием чисел Маха M , для которых проводятся расчёты. Использование приближения слабой сжимаемости не позволяет проводить расчёт при слишком малых M на мелких сетках в связи с резким ростом объёма вычислений. С другой стороны, увеличение числа Маха требует изменения уравнения состояния с включением дополнительной переменной температуры.

В разделе 4.3 приведены результаты моделирования вихря Тейлора–Грина на сетках 64^3 , 128^3 , 256^3 ячеек, при числах Рейнольдса $Re = 100$, 280, 1600, 4000. Согласно масштабным оценкам сетка 256^3 является нижней границей диапазона, необходимого для разрешения вихревых структур при прямом численном моделировании вихря ($Re = 1600$). Обсуждаются характеристики метода КАБАРЕ, предназначенного для расчёта трёхмерных течений в приближении слабой сжимаемости, на основе кривых скорости диссипации. Поведение последних указывает на то, что механизм численной диссипации оказывается более существенным по сравнению со своим гидродинамическим аналогом. Показано, что в вопросе разрешения вихревых структур переход на более мелкие сетки может оказаться более результативным в сравнении с использованием численных методов высокого порядка точности.

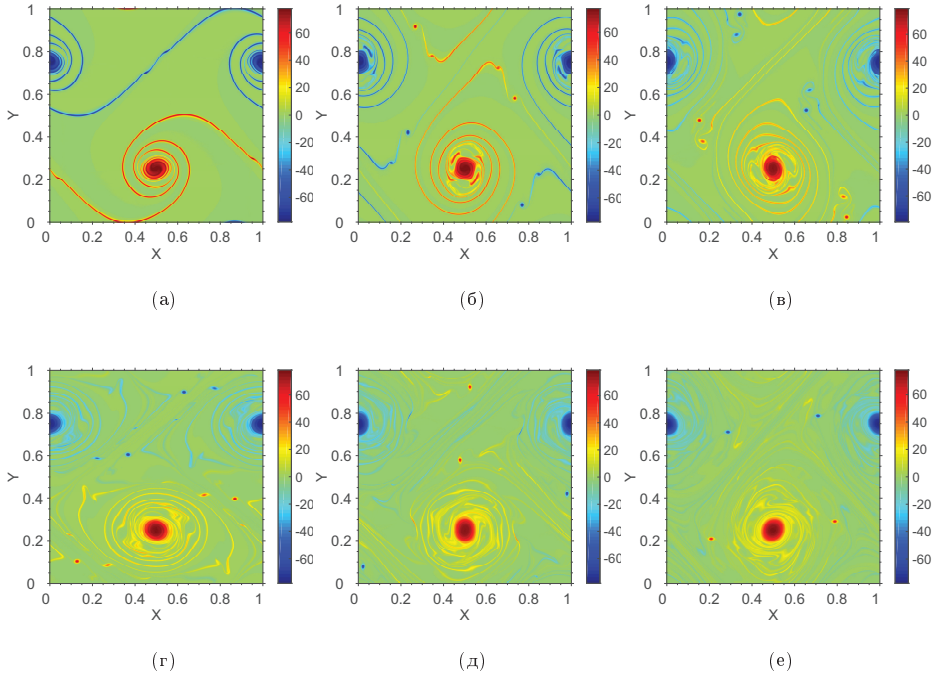


Рис. 4 — Поле завихренности в различные моменты времени: (а) — $t = 1.054$, (б) — $t = 1.581$, (в) — $t = 2.108$, (г) — $t = 2.635$, (д) — $t = 3.162$, (е) — $t = 3.689$, число гармоник $m = 1$, результаты расчёта на сетке 2048^2 ячеек.

Вихрь Тейлора–Грина представляет собой пример течения, в котором наблюдаются механизмы распада турбулентности, генерации малых вихрей и усиления диссипации вследствие растяжения вихревых трубок. В зависимости от Re наблюдаются различные режимы эволюции течения: в частности, распад одиночного вихря для $Re = 100, 280$ имеет ламинарный характер (рис. 6), при котором не происходит образование случайного поля завихренности, а при $Re = 1600, 4000$ — турбулентный (рис. 7).

На основе расчёта фурье-спектров установлено соответствие интервала энергетического спектра асимптотическим соотношениям, предсказываемым теорией однородной изотропной турбулентности (закон « $-5/3$ »).

Рассмотрение пространственных корреляционных функций обосновано пространственной хаотизацией вихревого поля и позволяет установить общую антикорреляционную зависимость между областями сильной завихренности и давления. В процессе распада турбулентности можно выявить влияние искусственных (с физической точки зрения) периодических граничных условий: именно они определяют закон убывания турбулентной кинетической энергии на больших временах эволюции, в то время как согласно классическим представлениям такое турбулентное течение должно забывать свое начальное состояние.

В заключение течение Тейлора–Грина рассматривается с точки зрения теории однородной изотропной турбулентности. На основе спектрального аналога уравнения Кармана–Ховарта (уравнения Линя) проведен расчет спектрального

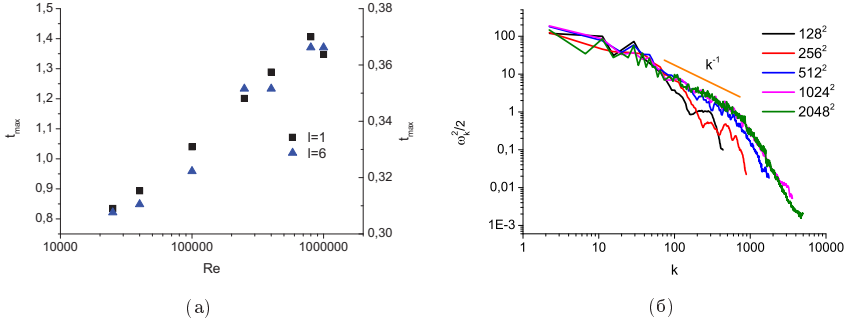


Рис. 5 — (а) — время достижения интегральной палинстрофией первого максимума при различных числах Рейнольдса для гармоники $m = 1$ (левая шкала) и $m = 6$ (правая шкала); (б) — фурье-спектр энстрофии, рассчитанный на последовательности сеток 128^2 – 2048^2 ячеек при $t = 2.109$. Сплошная кривая указывает наклон асимптотики k^{-1} .

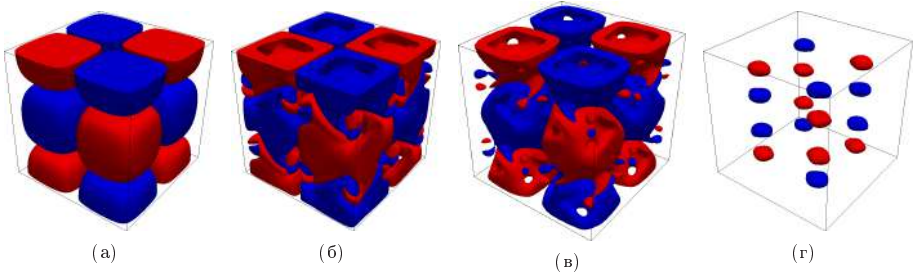


Рис. 6 — Поле завихренности в случае ламинарного распада вихря ($Re = 100$) в диапазоне $\omega_z \leq -0.2 \cup \omega_z \geq 0.2$ в различные моменты времени: (а) — $t = 0$, (б) — $t = 10$, (в) — $t = 15$, (г) — $t = 25$.

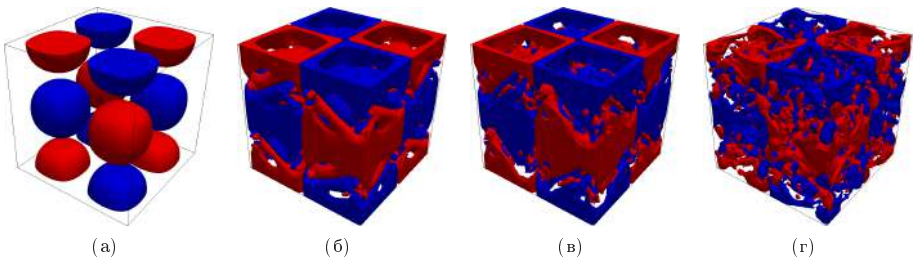


Рис. 7 — Поле завихренности в случае турбулентного распада вихря при самом большом числе $Re = 4000$ в диапазоне $\omega_z \leq -0.7 \cup \omega_z \geq 0.7$ в различные моменты времени: (а) — $t = 0$, (б) — $t = 5$, (в) — $t = 7$, (г) — $t = 12$.

переноса $T(k)$ и спектрального потока $P_E(k)$, используя двухточечный момент третьего порядка (продольная корреляционная функция тройных корреляций).

Аналогичный расчёт выполнен для обобщённого уравнения Кармана–Ховарта для однородной турбулентности на основе интеграла тройных взаимодействий. Кроме того, привлекая оценки интегрального и тейлоровского масштабов, показано влияние периодичности, использованной при задании начальных условий, на анизотропию течения на крупных масштабах, а также на сопоставимость размеров расчётной области с интегральным масштабом турбулентности.

В **Главе 5** содержатся основные результаты по моделированию сдвиговых течений термовязкой жидкости. В **разделе 5.1** приводятся результаты моделирования перемешивания в плоском течении термовязкой жидкости, возникающем под воздействием гармонических возмущений, распространяющихся от входной границы расчётной области. В качестве начального условия используется аналитически найденный профиль продольной скорости, остающийся стационарным благодаря заданию постоянного перепада давления по длине канала. Показано, что результате наложения возмущений на основной поток образуются когерентные структуры.

В качестве одной из характерных величин выступает толщина слоя смешения, возникающего вследствие распространения колебаний поперечной скорости, распространяющихся от входного сечения вниз по потоку. Эволюция слоя вовлечения оказывается зависящей в большей степени от амплитуды возмущения a , чем от числа Pr . Показано, что данный процесс может быть рассмотрен в терминах конвективной и абсолютной неустойчивостей.

Крупномасштабный захват слоев жидкости с различной температурой происходит на дистанции 10 калибров с образованием больших «клубов» (рис. 8). Поперечный перенос T , являющейся «активным» (по воздействию на основное течение) скаляром вследствие резкой температурной зависимости динамической вязкости, особенно силен в области точки перегиба. Однако и в пристеночной области с большей температурой образуется система вихрей размером, составляющим около $1/3$ размера крупномасштабных «клубов».

Выполнение пространственного преобразования Фурье (рис. 9) в произвольный момент времени $t = 276.8$ для полей завихренности, энтрофии, кинетической энергии потока, а также кинетической энергии возмущений относительно невозмущённого стационарного профиля, демонстрирует наличие некоторых закономерностей, соответствующих свойствам двумерного турбулентного течения. В частности, на уверенно разрешаемом участке спектра ω^2 имеется область, напоминающая асимптотику k^{-2} . Рассматривая спектр завихренности, можно исходить из предположения о том, что в процессе развития течения существуют области, в которых основную роль играет тензор деформаций (гиперболическая область) и те, в которых поведение определяется тензором вращений (эллиптическая область). Гиперболическая область связывается с развитой (однородной и изотропной) турбулентностью, в то время как эллиптические области должны соответствовать когерентным структурам.

Профиль скорости в ТВЖ, обладающий точкой перегиба, оказывает решающее влияние на процесс крупномасштабного смешения, причём сам этот процесс будет усиливаться по мере пространственного развития течения и напрямую не связан с генерацией возмущений и завихренности в пристеночном слое. На основе применения критерия Окубо–Вейса можно выделить четыре характерные области течения: пристеночный слой, в котором должна преобладать филаментация и активная эволюция мелких вихрей; средний слой (ядро потока),

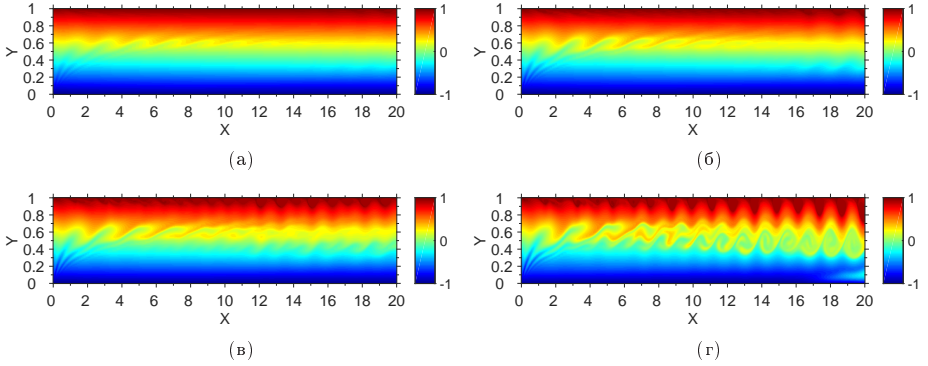


Рис. 8 — Распределение температуры в безразмерных единицах в момент времени $t = 134.375$ при различных амплитудах: (а) — $a = 0.01875$, (б) — $a = 0.0375$, (в) — $a = 0.05$, (г) — $a = 0.075$. Значение температуры у нижней стенки в безразмерных единицах $T = -1$, у верхней стенки $T = 1$, расчёт на сетке 1024×256 ячеек.

где выживают когерентные структуры, имеющие характерную пилообразную форму; зона окрестности точки перегиба, где наблюдаются крупномасштабные «клубы» и превалирует растяжение вовлеченных слоёв жидкости с различной температурой; узкий участок ниже точки перегиба, где могут существовать когерентные структуры.

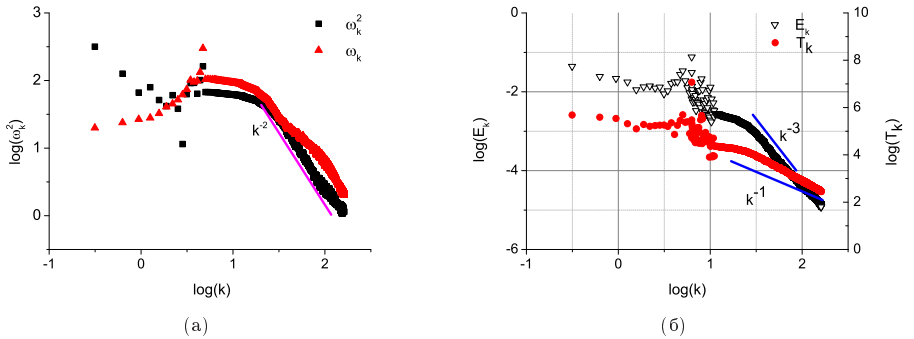


Рис. 9 — Спектры преобразования Фурье: (а) — энтропии ω^2 (■) и завихренности ω (△), малиновая линия указывает наклон асимптотики k^{-2} ; (б) — кинетической энергии возмущений основного профиля скорости (▽) и активной примеси (температура T) (●), синие линии указывают наклон асимптотик k^{-1} и k^{-3} .

В разделе 5.2 представлены результаты моделирования смешивания жидкостей с различными вязкостями на основе расчёта слоистого плоскопараллельного течения термовязкой жидкости. Показано, что затопленная горячая струя, проникающая в холодную окружающую жидкость, имеет тесную связь с явлениями в пограничных слоях. В начальный момент времени торжование захватывает только внешние области струи, затем вязкость приводит к замедлению частиц жидкости, расположенных все ближе и ближе к центральной оси. Наконец, вся

струя превращается в пограничный слой, в котором начинают развиваться процессы перемешивания.

Решение задачи о слоистом течении ТВЖ подтверждает основные феноменологические результаты экспериментов [15], в частности, существование универсального безразмерного комплекса $k_t = \text{Re}/R_\nu$, Re — число Рейнольдса, R_ν — отношение вязкостей между слоями ТВЖ (затопленной струи и окружающей жидкости). Действительно, если k_t превышает некоторое критическое значение, то процесс смешения полностью подавляется, в противном случае он зависит от R_ν . Увеличение отношения вязкостей R_ν при прочих равных условиях подавляет скорость роста неустойчивости.

Построены зависимости действительной части инкремента неустойчивости γ от Re при различных R_ν (рис. 10(a)); установлено, что рассматриваемое течение может быть описано в терминах теории свободного пограничного слоя с соответствующей асимптотической зависимостью толщины потери импульса

$$\delta_\theta = \sqrt{\left(\frac{C_1 + R_\nu}{1 + R_\nu}\right)^2 \frac{t}{k_t} + 1},$$

то есть $\delta_\theta \propto \sqrt{t}$ и $\delta_\theta \propto 1/\sqrt{\text{Re}}$; прослежена аналогия данной задачи с первой задачей Стокса.

Совокупность различных исходов взаимодействия маловязкого движущегося слоя с неподвижной жидкостью можно свести к 7 сценариям в пространстве параметров (R_ν, Re) . Эволюция процессов смешения определяется членами конвективного переноса и диффузии завихренности, генерации 6-й и иногда 12-й гармоник, каскадным слиянием вихрей вследствие двумерной природы течения, а также генерации крупномасштабной гармоники $m = 2$ в процессе смешения (рис. 10(б)).

Было показано, что численные значения гидродинамических величин (инкремента неустойчивости γ и толщины потери импульса δ_θ) обладают различными скоростями сеточной сходимости.

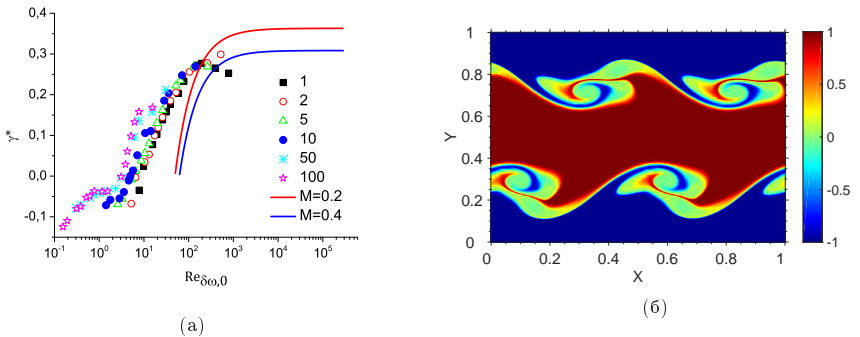


Рис. 10 — Зависимость инкремента неустойчивости γ от числа Рейнольдса $\text{Re}_{\delta_{\omega,0}}$ (a), определяемого по начальной толщине завихренности, сплошные линии указывают сравнение с результатами расчётов [14]; поле температуры при смешении в момент времени $t = 2.98$ при $R_\nu = 2$, $\text{Re} = 50000$ (б).

В **разделе 5.3** представляются результаты моделирования турбулентного смешения в напорном течении термовязкой жидкости в трёхмерной области, периодически продолженной в двух направлениях.

Последовательно излагаются рассуждения о выборе формы профиля осевого течения и характерных чисел Рейнольдса, подходящих для описания течения, приводится алгоритм задания хаотических возмущений с требуемой длиной корреляции, а также алгоритм восстановления соленоидальности случайного поля скорости, приводится диаграмма интенсивности возмущений по направлениям периодичности. На основе анализа кривых безразмерной кинетической энергии и скорости диссипации указано существование двух режимов развития течения в зависимости от характерного числа Рейнольдса и интенсивности возмущений. Дальнейшее описание течения проводится на основе интегральной завихренности, а также локальной структуры вихревого поля.

Кратко обсуждаются основные способы детектирования вихрей на основе Q -, Δ -, λ_2 -критериев, а также последние изыскания в этой области. На основе анализа поверхностей локальной энтропии (квадрата завихренности) и Q -критерия (рис. 11) проводится описание эволюции завихренности.

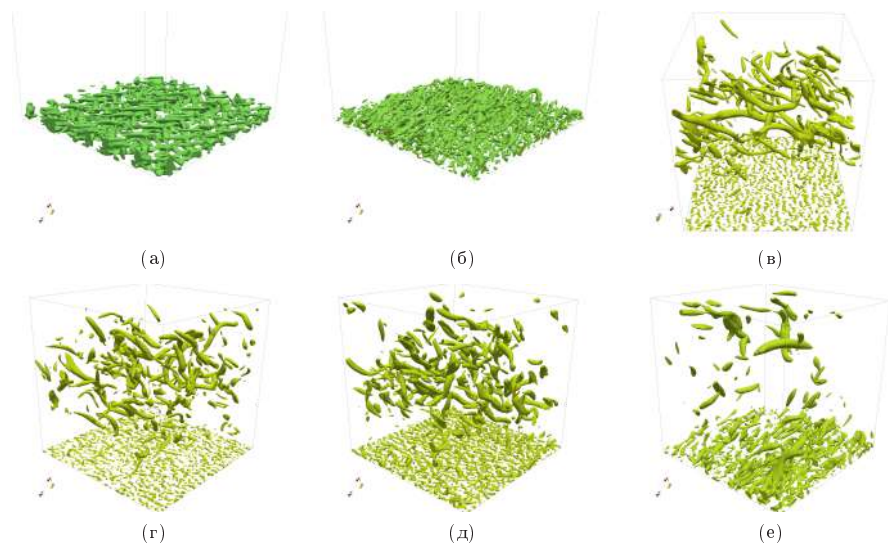


Рис. 11 — Поверхности Q -критерия в объёме расчётной области, на временном интервале от начала до завершения крупномасштабного смешения ($Re_1 = 4704, 128^3$), в различные моменты времени t (значения в скобках отображают поверхность уровня Q): (а) — 0.59 (2.57); (б) — 2.97 (2.57); (в) — 14.8 (20.15); (г) — 17.8 (46.02); (д) — 20.7 (24.12); (е) — 47.5 (8).

Раздел 5.3.9 показывает результаты применения фильтра пространственного усреднения по направлениям периодичности (рис. 12). Обсуждаются особенности полученных $Z-t$ -диаграмм полей скорости и температуры.

В **разделе 5.3.10** эволюция течения рассматривается с точки зрения уравнения для турбулентной кинетической энергии. В контексте выбора методики усреднения обсуждаются детали процедуры получения уравнений RANS. Приводятся данные об усреднённом поведении различных членов уравнения

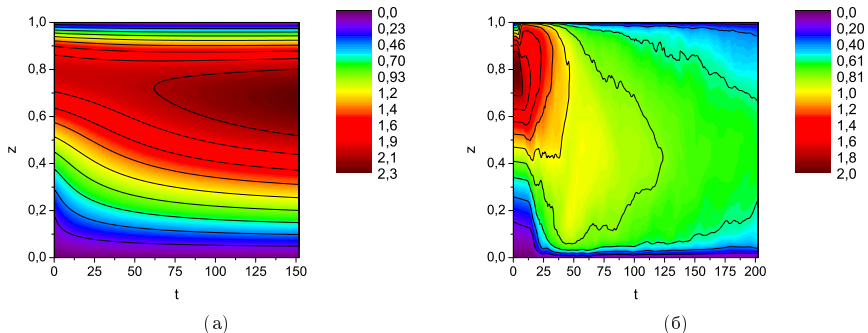


Рис. 12 — Z - t -диаграммы профилей продольной скорости в случае ламинарной (а) ($Re = 588$) и турбулентной эволюции течения (б) ($Re = 4704$), получаемых усреднением в направлении периодичности.

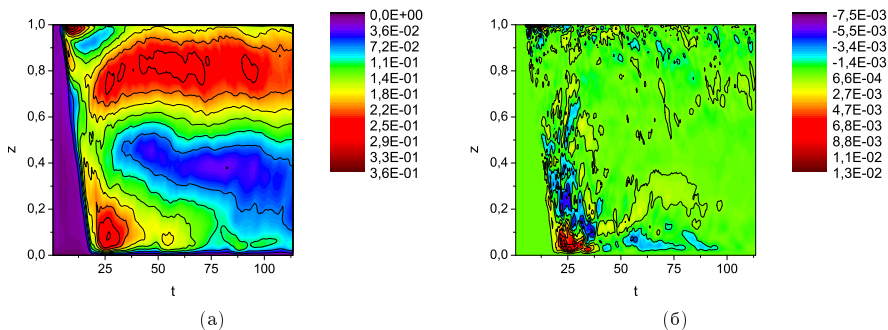


Рис. 13 — Z - t -диаграммы профилей интенсивности турбулентной кинетической энергии (а) и адвекции турбулентной кинетической энергии (б).

турбулентной кинетической энергии (ТКЭ): адвекции (рис. 13(б)), диффузии вследствие корреляции пульсаций давления и скорости, турбулентного транспорта, вязкого молекулярного транспорта, производства и диссипации. В **разделе 5.3.11** турбулизация течения рассматривается с точки зрения трёхмерных полей скорости и температуры (рис. 14). В **разделе 5.3.12** приводятся замечания о влиянии сжимаемости, приводящей к существенным изменениям в структуре и энергетических характеристиках крупномасштабной турбулентности в высокоскоростном течении сжимаемой среды. Дается описание модели дилатационной диссипации, которая, дополняя энергетический каскад Колмогорова, может привести к ускорению распада турбулентности, приведены кривые скорости диссипации вследствие дилатации в турбулентном течении ТВЖ, обосновывающие применимость модели слабой сжимаемости. В **разделе 5.3.14** обсуждается иерархия масштабов в турбулентном течении. На основе скорости трения вводится группа вязких масштабов, играющих ключевую роль в теории турбулентного пограничного слоя. Зависимость вязких масштабов от времени определяется по значениям полного напряжения на стенке. Продemonстрировано различие в вязких масштабах течения вследствие формирования тепловых

пристеночных слоёв. В заключение обсуждается определяющая роль соотношения между вязким масштабом δ^+ и размерами расчётной области в развитии и поддержании стационарной турбулентности.

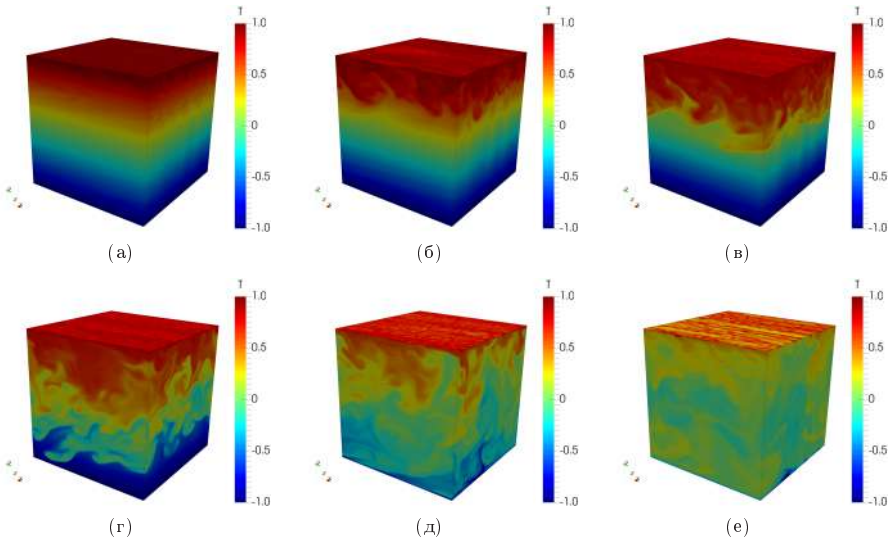


Рис. 14 — Распределение температуры в объёме жидкости, наблюдаемое в процессе смешения ($Re_1 = 4704, 128^3$), в различные моменты времени t : (а) — 2.97; (б) — 5.93; (в) — 8.9; (г) — 14.83; (д) — 29.7; (е) — 44.5.

В **Заключении** приведены основные результаты работы, перечисленные ниже.

1. Форма профиля скорости термовязкой жидкости с экспоненциальной температурной зависимостью динамической вязкости в установившемся течении в канале, стенки которого имеют различную температуру, является функцией безразмерного параметра α . Значения последнего для некоторой термовязкой жидкости определяются только перепадом температур. Вариация α в диапазоне $\alpha < -1.5936 \cup \alpha > 1.5936$ приводит к изменению выпуклости формы профиля скорости (появлению точки перегиба).

2. Обобщение уравнения Орра-Зоммерфельда на класс ТВЖ с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры приводит к появлению дополнительных членов, отражающих вклад резкой температурной зависимости вязкости жидкости в характеристики устойчивости течения. Решение данного уравнения для полученного профиля при больших значениях $|\alpha|$ в диапазоне существования точки перегиба показывает сильное влияние резкой температурной зависимости вязкости, связанное со смещением кривой нейтральной устойчивости в область малых чисел Рейнольдса и длинноволновых возмущений.

3. Выполнена программная реализация численного метода КАБАРЕ на основе приближения слабой сжимаемости для расчёта течений в двумерной и трёхмерной постановках.

4. Моделирование эволюции гармонических возмущений поперечной скорости, распространяющихся в плоском течении термовязкой жидкости, выполненное по методу КАБАРЕ, показало, что процесс развития неустойчивости в канале

происходит наиболее интенсивно в окрестности точки перегиба, причём он напрямую не связан с генерацией вихрей в пристеночной области. Рассматриваемое течение, имеет ряд резонансных частот, вызывающих наиболее активное вовлечение. Проведен анализ температурных полей на основе осредненной толщины вовлечения и смещения среднего положения изолинии температуры. Применение критерия Окубо-Вейса показало существование четырёх областей течения, в которых возможна активная филаментация турбулентной пелены или длительное существование вихревых структур.

5. Показано, что длина установления профиля ТВЖ x есть резкая функция параметра $\alpha - x = A(\alpha)(Re^*)^{-\alpha}$.

6. Описание течения в терминах завихренности подтверждает существование двух режимов течения. На основе уровней локальной энтропии и Q -критерия описана структура течения в горячем пристенке, развитие шпилькообразных вихрей, появление чрезвычайно длинных вихревых образований на дальних стадиях эволюции течения, а также диффузия завихренности.

7. Показано существование сильной турбулентности в верхней половине течения в канале с интенсивностью в диапазоне $\langle I \rangle \sim 0.0184-0.236$ практически до конца расчёта. На основе анализа слагаемых уравнения для ТКЭ установлено, что область их максимальных значений приходится на участок крупномасштабного смещения $t \approx 20-45$. $Z-t$ -диаграммы различных компонент турбулентного теплового потока показывают превалирующую роль турбулентных пульсаций в направлении основного течения. Приведены оценки интегральных масштабов на основе корреляционных функций.

Список литературы

1. *Potter M. C., Graber E.* Stability of Plane Poiseuille Flow with Heat Transfer // *Physics of Fluids*. — 1972. — Vol. 15, no. 3. — P. 387.
2. *Schäfer P., Herwig H.* Stability of plane Poiseuille flow with temperature dependent viscosity // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 1993. — Jan. — Vol. 36, no. 9. — P. 2441–2448.
3. *Wall D. P., Wilson S. K.* The linear stability of channel flow of fluid with temperature-dependent viscosity // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1996. — Sept. — Vol. 323, no. 1. — P. 107.
4. *Урманчиев С. Ф.* Гидродинамические эффекты в аномально термовязких и пористых средах : Дисс. докт. физ.-мат. наук / Урманчиев С. Ф. — Институт механики уфимского научного центра РАН, 2004.
5. *Drazin P. G., Reid W. H.* *Hydrodynamic Stability*: — 2nd ed. — Cambridge : Cambridge University Press, 07/2004. — URL: <https://www.cambridge.org/core/books/hydrodynamic-stability/A0E78BC88D5572AED79CCCE8B977707C>.
6. *Davidson P. A.* *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. — OUP Oxford, 2004. — P. 678. — URL: <https://books.google.nl/books?id=rk0mKzujZB4C>.
7. *McDonough J. M.* *Introductory Lectures on Turbulence*. — CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014. — P. 180.
8. *Yih C.-S.* Instability due to viscosity stratification // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1967. — Feb. — Vol. 27, no. 02. — P. 337.
9. *Низамова А. Д., Киреев В. Н., Урманчиев С. Ф.* Некоторые точные решения стационарной системы уравнений для стратифицированного течения двух термовязких жидкостей // *Вестник УГАТУ*. — 2016. — Т. 20, вып. 72, № 2. — С. 91–95.

10. Головизнин В. М., Карабасов С. А., Кобринский И. М. Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. — 2003. — Т. 15, № 9. — С. 29–48.
11. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов / В. Головизнин [и др.]. — М.: Издательство Московского университета, 2013. — С. 472. — (Серия «Суперкомпьютерное образование»).
12. Orszag S. A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // J. Fluid Mech. — 1971. — Vol. 50. — P. 689–703. — Printed in Great Britain.
13. Lipavskii M. V., Tolstykh A. I., Chigirev E. N. Numerical simulation of shear layer instability using a scheme with ninth-order multioperator approximations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — Vol. 53, no. 3. — P. 296–310. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0965542513030081>.
14. Sandham N. D., Reynolds W. C. Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer // Journal of Fluid Mechanics. — 1991. — Vol. 224. — P. 133–158.
15. Campbell I., Turner J. S. The Influence of Viscosity on Fountains in Magma Chambers // Journal of Petrology. — 1986. — Vol. 27, no. 1. — P. 1–30.

Список работ по теме диссертации

1. Kulikov Y. M., Son E. E. Fluid flow with abrupt viscosity-temperature dependence // High Temperature. — 2014. — Vol. 52, no 5. — P. 723–729.
2. Kulikov Y. M., Son E. E. The CABARET method for a weakly compressible fluid flows in one- and two-dimensional implementations // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Vol. 774, no 1. — P. 012094.
3. Куликов Ю. М., Сон Э. Е. Об устойчивости течения термовязкой жидкости в канале // Теплофизика и аэромеханика. — 2017. — Т. 24, № 6. — С. 909–928.
4. Kulikov Y. M., Son E. E. Stability of thermoviscous fluid flow under high temperature gradients // High Temperature. — 2017. — Vol. 55, no 1. — P. 131–138.
5. Kulikov Y. M., Son E. E. CABARET scheme implementation for free shear layer modeling // Computer Research and Modeling. — 2017. — Vol. 9, no 6. — P. 881–903.
6. Kulikov Y. M., Son E. E. Kelvin-Helmholz instability in thermoviscous free shear flow // Journal of Physics: Conference Series. — 2018. — Vol. 946. — P. 012075.
7. Kulikov Y. M., Son E. E. Taylor-Green vortex simulation using CABARET scheme in a weakly compressible formulation // The European Physical Journal E. — 2018. — Vol. 41, no 3.
8. Kulikov Y. M., Son E. E. On the Construction of Turbulent Transfer Spectral Models Using 3D Numerical Simulation of Taylor-Green Vortex Decay // High Temperature. — 2018. — Vol. 56, no 6. — P.921–926.
9. Куликов Ю. М., Сон Э. Е. Режимы течения термовязкой жидкости в плоском неизотермическом слое // Теплофизика и аэромеханика. — 2018. — Т. 25, № 6. — С. 877–897.

Куликов Юрий Матвеевич

УСТОЙЧИВОСТЬ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ТЕЧЕНИЙ
ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать		Формат 60×84/16
Печать офсетная	Усл.-изд. л.	Усл.-печ. л.
Тираж ___ экз.	Заказ №	Бесплатно

ОИВТ РАН. 125412, Москва, Ижорская ул., 13, стр. 2