

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

Объединённый институт высоких температур
Российской Академии Наук
(ОИВТ РАН)

На правах рукописи

Вихров Евгений Владимирович

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ РАСШИРЕНИИ
УЛЬТРАХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ

Специальность: 1.3.9 – Физика плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

Зеленер Борис Вигдорович,

кандидат физико-математических наук

Москва

2026

Содержание

Введение	5
Глава 1. Обзор литературы	12
1.1 Техника эксперимента	12
1.1.1 Общая схема установки	12
1.1.2 Источник атомов и Зеемановский замедлитель	13
1.1.3 Магнитооптическая ловушка	15
1.1.4 Фотоионизация	17
1.1.5 Параметры ультрахолодной плазмы	18
1.2 Диагностика ультрахолодной плазмы	19
1.2.1 Детектирование внешним электрическим полем	19
1.2.2 Оптические методы	20
1.3 Особенности расширения плазмы в вакуум	22
1.3.1 Нарушение электронейтральности	22
1.3.2 Поведение кинетической энергии ионов	23
1.3.3 Электронные колебания	25
1.3.4 Акустические колебания ионов	26
1.3.5 Динамика распределения плотности	27
1.4 Особенности расширения плазмы в электромагнитных полях	29
1.4.1 Динамика распределения плотности	30
1.4.2 Колебания гидродинамической скорости	32
1.4.3 Высокочастотная дрейфовая неустойчивость электронов	33
1.5 Теоретические результаты	35
1.5.1 Кинетический подход	35
1.5.2 Гибридная молекулярная динамика	37
1.5.3 Метод Монте-Карло и уравнения сплошной среды	39
Глава 2. Моделирование	42
2.1 Метод молекулярной динамики	42

2.1.1	Взаимодействие частиц и уравнения движения	43
2.1.2	Взаимодействие частиц с внешними полями	45
2.1.3	Интегрирование уравнений движения	47
2.1.4	Генерация случайно распределённых величин	49
2.1.5	Начальные и граничные условия	50
2.2	Особенности программной реализации	52
2.2.1	Общая структура программы и используемые средства . .	53
2.2.2	Понижение вычислительной сложности	54
2.2.3	Ускорение вычислений	58
2.2.4	Тестирование	60
2.3	Заключение к разделу	64
Глава 3. Ультрахолодная плазма в вакууме		66
3.1	Начальные и граничные условия	66
3.1.1	Используемые характерные величины	67
3.2	Динамика электронов	68
3.2.1	Дисбаланс зарядов и электрическая потенциальная яма . .	68
3.2.2	Распределение электронов	70
3.2.3	Температура электронов	70
3.3	Динамика ионов	72
3.3.1	Температура ионов	72
3.3.2	Распределение ионов и формирование ионного фронта . .	74
3.3.3	Движение ионного фронта	77
3.3.4	Об экспоненциальном распределении концентрации	78
3.4	Заключение к разделу	80
Глава 4. Ультрахолодная плазма в квадрупольном магнит-		
ном поле		81
4.1	Начальные и граничные условия	81
4.1.1	Параметры подобия	81
4.1.2	Параметры моделирования	82

4.2	Динамика электронов	83
4.2.1	Дисбаланс зарядов и его структура	83
4.2.2	Распределение координат электронов	84
4.2.3	Температура электронов	85
4.3	Динамика ионов	86
4.3.1	Распределение координат ионов	86
4.3.2	Температура ионов	87
4.3.3	Колебания радиальной скорости ионов	89
4.3.4	Удержание плазмы	90
4.4	Заключение к разделу	91
Глава 5. Ультрахолодная плазма в однородных полях. . . .		93
5.1	Начальные и граничные условия	93
5.2	Различные механизмы потери электронов	94
5.2.1	Электронный сгусток	94
5.2.2	Электронный пучок	96
5.2.3	Диокотронная неустойчивость пучка	99
5.2.4	О реализации различных механизмов потери	100
5.2.5	О возможной форме электронного сигнала	102
5.3	Динамика ионов	103
5.3.1	Распределение координат ионов	104
5.3.2	Распределение скоростей ионов	106
5.4	Заключение к разделу	107
Заключение		109
Список литературы		110

Введение

Актуальность работы. Часто различные виды плазмы, например, плазма газовых разрядов, плазма солнечной короны или плазма термоядерного синтеза, являются относительно горячими. Экстремальные значения параметров, при которых существуют многие виды горячей плазмы, обуславливают сравнительно быструю динамику физических процессов, протекающих в ней, а также приводят к различным экспериментальным трудностям при их изучении.

С помощью методов лазерного охлаждения и фотоионизации ультрахолодного газа, находящегося в магнитооптической ловушке, возможно создание полностью ионизованной ультрахолодной плазмы, состоящей из электронов и однократно заряженных ионов. Начальная температура электронов в такой плазме находится в диапазоне от 1 до 1000 К, а начальная температура ионов составляет величину порядка 1 мК. При этом начальная пиковая концентрация достигает значения порядка 10^{11} см^{-3} . Характерный начальный размер плазмы не превышает 0.2 см.

Ультрахолодная плазма обладает рядом значительных преимуществ. Во-первых, относительная простота эксперимента, который может быть выполнен усилиями небольшой лаборатории. Причем, оптические методы, используемые при получении ультрахолодной плазмы, обеспечивают очень хорошо контролируемые начальные условия. Во-вторых, экстремально низкие значения начальных температур компонентов плазмы обуславливают сравнительно медленную динамику различных процессов. Более того, возможно создание плазмы с достаточно высоким значением параметра неидеальности $\Gamma \approx 1$, которую, как правило, достаточно трудно получить в лаборатории. В-третьих, возможно получение плазмы в состоянии динамического равновесия плотности.

Таким образом, актуальность тематики обусловлена тем, что специфика ультрахолодной плазмы позволяет как проверить рамки применимости уже существующих теорий, так и использовать её для более детального изучения

физических процессов, протекающих в плазме. Необходимо отметить, что активно ведётся экспериментальная работа по исследованию воздействия на ультрахолодную плазму внешних электрического и магнитного полей. Кроме того, ультрахолодная плазма уже находит прикладные применения. Одним из которых является электронная микроскопия, где ультрахолодная плазма выступает в качестве источника холодных электронов.

Эксперимент обладает и недостатками. Так, для измерения параметров ультрахолодной плазмы, невозможно использование различных твёрдых зондов. В связи с этим, в основу измерений положены методы лазерной спектроскопии и методы детектирования заряженных частиц. Как следствие, диагностика электронов затруднена.

Недостающие сведения можно получить с помощью численного моделирования, что является достаточно распространенным при изучении плазмы. Здесь существуют различные методы, например: магнитная гидродинамика, различные кинетические модели, методы частицы в ячейке (Particle In Cell) и молекулярная динамика. Эти методы дают различную детализацию процессов и применяются на различных характерных пространственных и временных масштабах.

Принимая во внимание начальные значения параметров ультрахолодной плазмы, получаем, что ионная компонента находится в режиме сильной неидеальности ($\Gamma_i \gg 1$), а электронная от слабой ($\Gamma_e \ll 1$) до умеренной ($\Gamma_e \approx 1$). Чаще всего ультрахолодная плазма расширяется в вакуум и типичное время её существования варьируется от десятков до сотен микросекунд. Поэтому значения параметра неидеальности, равно как и изначально сравнительно большое среднее расстояние между частицами, претерпевают существенные изменения во времени.

В связи с этим, для моделирования такой плазмы представляется целесообразным использование метода молекулярной динамики. При этом решаются уравнения движения отдельных взаимодействующих частиц плазмы и

естественным образом учитываются как самосогласованное электрическое поле плазмы, так и столкновения между частицами. Таким образом, метод должен давать реалистичные сведения о динамике плазмы.

Однако вычислительная сложность этого метода квадратично зависит от числа частиц, а реализация способов её понижения для открытых (нулевых) граничных условий сопряжена с известными трудностями. Это приводит к тому, что для моделирования доступно значительно меньшее число частиц, чем в реальном эксперименте. Таким образом, ещё одной актуальной задачей является выработка критериев подобия, которые позволят сравнивать результаты молекулярно-динамического моделирования с экспериментальными.

Целью работы является верификация модели ультрахолодной плазмы, как системы классических точечных частиц, взаимодействующих друг с другом по закону Кулона и изучение физических процессов, протекающих в такой плазме. Для её достижения в работе решались следующие задачи:

1. Разработка программ для моделирования ультрахолодной плазмы и программ обработки получаемых данных.
2. Определение критериев подобия для сопоставления результатов моделирования с экспериментальными.
3. Экстраполяция полученных результатов на условия эксперимента и определение влияния как начальных параметров самой плазмы, так и параметров внешних полей на её динамику.

Научная новизна работы состоит в том, что:

1. Верифицирована самосогласованная математическая модель ультрахолодной плазмы как системы классических точечных взаимодействующих зарядов в открытых граничных условиях, а также предложены критерии подобия, позволяющие корректно экстраполировать результаты моделирования на макроскопические экспериментальные системы.

2. Выявлен механизм формирования ионного фронта, возникающего при расширении ультрахолодной плазмы в вакуум, обусловленный начальным дисбалансом зарядов.
3. Получены универсальные безразмерные зависимости для оценки времени формирования и скорости движения фронта, не зависящие от начальной температуры электронов в широком диапазоне параметров.
4. Обнаружен эффект насыщения времени удержания ультрахолодной плазмы внешним квадрупольным магнитным полем при росте его градиента.
5. Выявлен механизм возникновения колебаний радиальной скорости ионов, обусловленный формированием знакопеременного потенциального рельефа при расширении ультрахолодной плазмы во внешнем квадрупольном магнитном поле.
6. Впервые предсказаны два качественно различных механизма потери электронов ультрахолодной плазмой, находящейся в скрещенных постоянных однородных электрическом и магнитном полях (формирование дрейфующего сгустка и формирование дрейфующего протяженного пучка), и показано, что в режиме пучка развивается диокотронная неустойчивость, приводящая к его волнообразной деформации.

Практическая значимость работы заключается в том, что разработанный автором программный комплекс (с поддержкой MPI/OpenMP/CUDA) адекватно воспроизводит динамику ультрахолодной плазмы и позволяет моделировать различные процессы, протекающие в ней. Более того, в совокупности с предложенными критериями подобия становится возможным не только сравнение результатов моделирования и эксперимента, но и предсказание новых эффектов в ультрахолодной плазме, некоторые из которых могут иметь прикладное значение.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Формирование ионного фронта при расширении ультрахолодной плазмы в вакуум в диапазоне начальных пиковых плотностей от 10^9 до 10^{10} см $^{-3}$ и начальных температур электронов от 20 до 100 К происходит в результате нарушения её электронейтральности.
2. Безразмерная величина электрического поля, возникающего в области ионного фронта, одинакова в диапазоне плотностей от 10^7 до 10^{10} см $^{-3}$ и начальных температур электронов от 25 до 100 К.
3. Время удержания ультрахолодной плазмы внешним квадрупольным магнитным полем не изменяется при увеличении градиента этого поля, с учётом перехода от параметров моделирования к экспериментальным, в диапазоне от 100 до 250 Гс/см и не зависит от начальной температуры электронов в диапазоне от 20 до 160 К.
4. Численно предсказаны два механизма потери электронов ультрахолодной плазмой, находящейся в скрещенных постоянных однородных электрическом поле и магнитном поле с индукцией в диапазоне от 10 до 60 Гс: покинувшие электроны формируют либо дрейфующий объёмный сгусток при напряженности электрического поля менее 10^{-5} статВ/см и их начальной температуре более 100 К, либо дрейфующий протяженный пучок при напряженности электрического поля более 10^{-5} статВ/см и их начальной температуре менее 100 К.

Апробация работы и публикации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных конференциях: 15-я Всероссийская научная конференция с международным участием “Физика ультрахолодных атомов” (Новосибирск, 2021), 18-е Международное совещание “Сложные системы заряженных частиц и их взаимодействие с электромагнитным излучением”(Москва, 2022), XXI Международное Совещание по Магнитоплазменной Аэродинамике (Москва, 2022), 17 Всероссийская научная конференция с международным уча-

ствием “Физика ультрахолодных атомов” (Новосибирск, 2023), 22-е Международное совещание “Сложные системы заряженных частиц и их взаимодействие с электромагнитным излучением” (Москва, 2026).

По материалам диссертации опубликовано 5 [1–5] работ в зарубежных журналах, входящих в перечень ВАК и индексируемых в базах Scopus и Web of Science, 4 из которых в журналах первого квартиля (Q1).

Достоверность полученных результатов подтверждается, прежде всего, их хорошим согласием с экспериментом, а также наличием публикаций в высоко-рейтинговых рецензируемых научных изданиях.

Личный вклад. В основу диссертационной работы легли результаты исследований, проведенных автором лично или при его непосредственном участии, в 2020-2025 гг., в ОИВТ РАН. Им создан комплекс программ для моделирования ультрахолодной плазмы.

Обозначения и структура работы. Векторы обозначаются жирным шрифтом, например $\mathbf{F}$, $\mathbf{r}$. Скалярные величины обозначаются обычным шрифтом, например U , m .

Математические выражения и рисунки нумеруются сначала в каждом разделе. При этом, номер раздела пишется вначале. Например, (3.1.1.3) означает выражение (3) раздела (3.1.1).

Там, где это не вызывает путаницы, ультрахолодная плазма называется просто плазмой.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. В разделах главы 1, представляющей собой обзор, используются те системы единиц, которые использовали авторы оригинальных работ. Во всех остальных главах используется Гауссова система единиц (СГС).

Основная часть работы представлена главами 2, 3, 4 и 5. Глава 2 посвящена особенностям моделирования ультрахолодной плазмы и ускорению вычислений. Глава 3 посвящена физическим процессам при расширении ультрахолодной плазмы в вакуум. В главе 4 обсуждаются некоторые особенности воздей-

ствия внешнего квадрупольного магнитного поля на ультрахолодную плазму. Наконец, глава 5 посвящена расширению ультрахолодной плазмы в скрещенных постоянных однородных электрическом и магнитном полях, в особенности динамике электронов.

Глава 1. Обзор литературы

В рамках данной главы рассматриваются вопросы, связанные с тематикой ультрахолодной плазмы. Для формирования наиболее последовательного представления об ультрахолодной плазме, вначале дан краткий обзор физических основ эксперимента и его техники. Затем приводятся основные экспериментальные результаты. Наконец, даётся обзор некоторых теоретических результатов.

1.1 Техника эксперимента

Ультрахолодная плазма впервые получена в 1999г. из атомов Хе, в связи с чем опубликована работа [6]. Вообще, в качестве исходных веществ, используются не только инертные газы, но также щелочные и щелочно-земельные металлы [7; 8]. В отличие от многих других видов плазмы, где ионизация вещества происходит в результате столкновений, ультрахолодная плазма создаётся путём фотоионизации ультрахолодного газа.

1.1.1 Общая схема установки

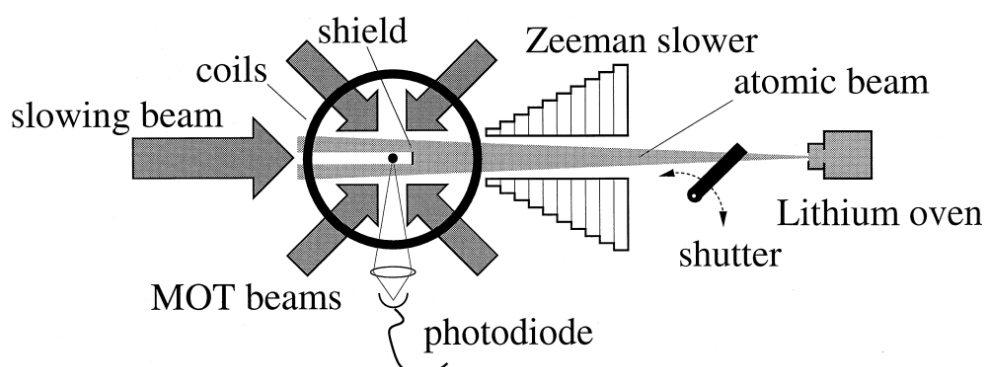


Рис. 1.1.1.1: Схема [9] установки для получения ультрахолодного газа.

В работе [9] приведена типичная схема установки по получению такого газа из атомов Li. Эта схема приведена на Рис. 1.1.1.1, взятом из работы [9], на котором продемонстрированы основные узлы: источник атомов (в случае данного

конкретного рисунка это печь), Зеемановский замедлитель, магнитооптическая ловушка, система лазеров и измерительных приборов. Зеемановский замедлитель и магнитооптическая ловушка представляют собой устройства, которые функционируют при глубоком вакууме.

Далее рассмотрены физические явления, лежащие в основе этих устройств.

1.1.2 Источник атомов и Зеемановский замедлитель

Из источника (в случае работы [9] это печь), атомы попадают в Зеемановский замедлитель в виде коллимированного пучка, где происходит их замедление при помощи лазерного охлаждения. Приведем некоторые оценки.

Представим источник, как камеру, внутри которой находится газ, медленно истекающий через малое отверстие. В предположении теплового равновесия для газа справедливо распределение Максвелла:

$$F(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_b T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_b T} \right), \quad (1.1.2.1)$$

где v – скорости атомов, T – их температура, m – их масса, а k_b – постоянная Больцмана. Из условия $dN(v)/dv = 0$, получаем максимальную скорость частиц, вылетающих из отверстия:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{3k_b T}{m}}. \quad (1.1.2.2)$$

Покинув источник, атомы в виде пучка, со скоростями, не большими чем $v_{\max}$, попадают в Зеемановский замедлитель, который представляет собой трубу с намотанным на неё коническим соленоидом. Навстречу этому пучку направлен лазерный луч, настроенный в резонанс с атомами. Впервые такое устройство было представлено в работе [10], где охлаждались атомы Na.

Столкнувшись с резонансным фотоном, атом переходит в возбужденное состояние. Спустя некоторое время атом испускает фотон в каком-либо направлении, возвращаясь в основное состояние. Таким образом, импульс атома уменьшается не более чем на $\hbar k$ в направлении оси замедлителя. Ясно, что через

некоторое число актов взаимодействия, атом будет полностью остановлен. Это эквивалентно его движению с некоторым ускорением $\mathbf{a}$, следовательно длина замедлителя есть:

$$L_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{2a} \quad (1.1.2.3)$$

Пусть атом находится половину времени в основном состоянии, а другую половину в возбужденном. Тогда его ускорение есть [11]:

$$\mathbf{a} = \gamma_{\text{as}} \frac{\hbar \mathbf{k}}{2m}, \quad (1.1.2.4)$$

где $\hbar$ – приведенная постоянная Планка, $\mathbf{k}$ – волновой вектор, γ_{as} – интенсивность поглощения и рассеяния.

Величина γ_{as} зависит от нескольких факторов. Во-первых, от доплеровского сдвига частоты $\omega_D = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, возникающего в системе отсчета, связанной с атомом, скорость движения которого равна v . Во-вторых, от отношения $s_0 = I/I_s$ интенсивности лазерного излучения I к интенсивности насыщения I_s . В-третьих, от расстройки $\delta = \omega_l - \omega_a$ частоты лазера ω_l от резонансной частоты атома ω_a . Как результат, имеет место следующее выражение для интенсивности поглощения и рассеяния [11]:

$$\gamma_{\text{as}} = \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{s_0}{1 + s_0 + [2(\delta + \omega_D)/\gamma]^2}, \quad (1.1.2.5)$$

где $\gamma = 4\omega_l^3 \mu^2 / 3\hbar c^3$ (здесь μ – величина дипольного момента атома, c – скорость света).

Атомы не находятся в резонансе с лазерным лучом постоянно. Так, по мере уменьшения их скорости, из-за эффекта Доплера, возникает расстройка от резонанса. Для решения этой проблемы используется эффект Зеемана. При этом профиль магнитного поля замедлителя выбирается таким образом, что бы расщепление энергетических уровней атомов, по мере движения через замедлитель, обеспечивало их резонансное взаимодействие с лазерным лучом. Полагая, что декартова ось Z совпадает с осью трубы замедлителя, профиль магнитного

поля, зависит от z следующим образом:

$$B(z) = B_0 \sqrt{1 - z/z_0}, \quad (1.1.2.6)$$

где $B_0 = \hbar k v_{\max}/\mu'$, $\mu' = (g_e M_e - g_g M_g)/\mu_b$ (здесь μ_b – магнетон Бора, $g_{e,g}$ и $M_{e,g}$ – фактор Ланде и магнитное квантовое число соответственно, для возбужденного (подстрочное e) и основного (подстрочное g) состояний), $z_0 = m v_{\max}^2 / \eta \gamma \hbar k$, $\eta < 1$ – параметр подгонки. Такой профиль обеспечивает замедление частиц постоянным ускорением. Замедлитель и его поле схематично изображены на Рис. 1.1.2.1, взятом из работы [11].

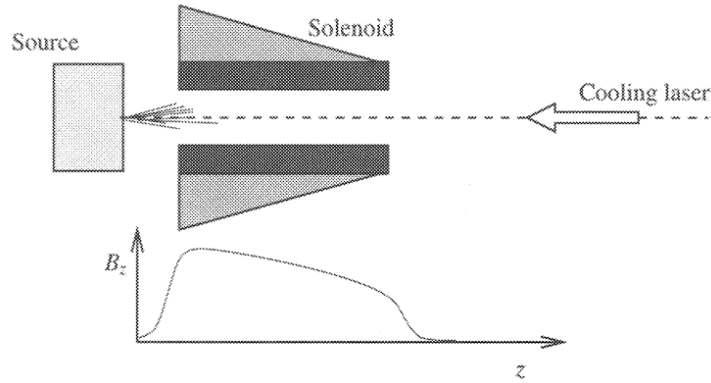


Рис. 1.1.2.1: Схематично изображены [11]: Зеемановский замедлитель (верх) и профиль его магнитного поля $B(z)$ (низ).

После достаточного уменьшения скорости атомов становится возможным их дальнейший захват и удержание в магнитооптической ловушке.

1.1.3 Магнитооптическая ловушка

В основе магнитооптической ловушки используются всё те же физические явления, что и в Зеемановском замедлителе. Впервые такое устройство было продемонстрировано в работе [12], где удерживались атомы Na. Сама ловушка представляет собой вакуумную камеру с окнами, через которые светят лазерные лучи, и две катушки, ток в которых течёт в противоположных направлениях. Катушки создают квадрупольное магнитное поле так, что нуль поля находится в центре ловушки. Вдоль каждого из трёх декартовых направлений, светит по

два лазерных луча, навстречу друг другу, с противоположными поляризациями σ_+ и σ_- . Все лучи пересекаются в центре ловушки.

Оказавшись в ловушке, атом испытывает действие квадрупольного магнитного поля. Кроме того, это поле обеспечивает Зеемановский сдвиг его энергетических уровней так, чтобы лазерный луч был настроен с ним в резонанс и испытывал действие некоторой силы, направленной к центру ловушки.

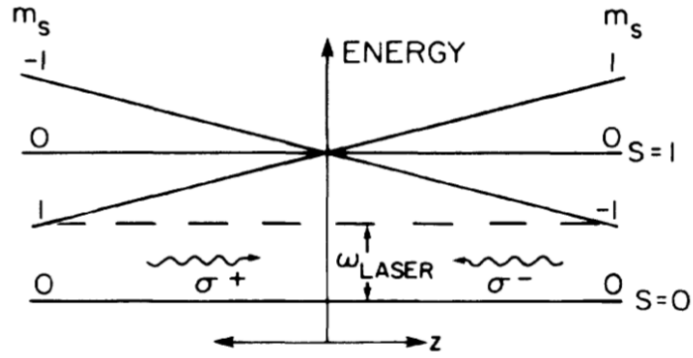


Рис. 1.1.3.1: Схема [12] энергетических уровней атомов в ловушке.

Принцип действия ловушки представляется следующим [12]. Пусть спин атома в основном состоянии $S = 0$ $m_s = 0$, а в возбуждённом $S = 1$ $m_s = -1, 0, +1$. Вдоль направления Z , эффект Зеемана смещает уровни на величину $\Delta E = \mu m_s B(z) \approx \mu m_s b z$. Это изображено на Рис. 1.1.3.1[12]. Вдоль этого же направления, навстречу друг другу, светят лазеры с поляризацией σ_+ и σ_- . В положении $z > 0$ атом поглощает больше σ_- фотонов, поскольку резонансная частота ближе к $\Delta m = -1$. При $z < 0$ ситуация меняется на противоположную[12]. В результате атом испытывает действие силы [11]:

$$\mathbf{F}_{\text{opt}} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_-, \quad (1.1.3.1)$$

где $\mathbf{F}_{\pm}$ определяется с помощью выражений (1.1.2.4) и (1.1.2.5).

Кроме того, нейтральный атом с магнитным моментом μ может удерживаться в квадрупольном магнитном поле, т.к. испытывает действие некоторой

силы [11]:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \nabla(\mu \mathbf{B}). \quad (1.1.3.2)$$

Точный расчет для квадрупольной магнитной ловушки для нейтральных атомов приведен, например, в работе [13].

Газообразное облако атомов удерживается в магнитооптической ловушке при температурах $T \propto 10^{-3}$ К.

1.1.4 Фотоионизация

Удерживаемый в магнитооптической ловушке ультрахолодный газ переводится в плазменное состояние при помощи фотоионизации. В большинстве случаев этот процесс состоит из двух шагов. Вначале атомы, с помощью непрерывного лазера, возбуждаются на тот энергетический уровень, при котором происходит их охлаждение. Затем, при помощи импульсного лазера происходит их ионизация. Получаются однократно заряженные ионы, доля которых зависит от интенсивности лазерного излучения [7]. Отметим, что ионизация возможна и при помощи непрерывного лазера. Этим способом создается стационарная ультрахолодная плазма [14].

Для фотоионизации можно привести следующее количественное описание [7; 8]. Будем исходить из того, что вначале атом покоится. Фотон ионизирующего лазера сообщает ему энергию и импульс, следовательно:

$$\hbar\omega_l - E_{\text{ph}} = \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{p_e^2}{2m_e} \quad (1.1.4.1)$$

$$\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_e,$$

где E_{ph} – энергия ионизации, а $m_{i,e}$ – массы иона и электрона соответственно. Ввиду малости импульса фотона, можно положить $\mathbf{p}_i \approx -\mathbf{p}_e$. Практически всю энергию кванта уносит электрон, поэтому:

$$E_e = \frac{p_e^2}{2m_e} \approx \hbar\omega_l - E_{\text{ph}}. \quad (1.1.4.2)$$

Для энергии сообщаемой иону имеем:

$$E_i = \frac{p_i^2}{2m_i} \approx \frac{p_e^2}{2m_i} = (\hbar\omega_l - E_{ph}) \cdot \frac{m_e}{m_i}. \quad (1.1.4.3)$$

Ввиду того, что $m_i \gg m_e$, иону сообщается лишь малая энергия. Начальная энергия электрона, таким образом, хорошо контролируется энергией ионизирующего лазерного излучения.

1.1.5 Параметры ультрахолодной плазмы

Эксперимент позволяет получать два вида начального распределения плотности плазмы: нормальное и экспоненциальное.

Нормальное распределение получается путём фотоионизации захваченных в магнитооптическую ловушку атомов сразу после её выключения. В этом случае распределение плотности плазмы повторяет таковое для нейтральных атомов и хорошо аппроксимируется выражением[7; 15]:

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad (1.1.5.1)$$

где n_0 – начальная пиковая концентрация плазмы, а σ_0 – её характерный начальный размер.

Если предварительно захваченные в магнитооптическую ловушку атомы перевести на такой энергетический уровень, для которого характерен большой дипольный момент, то становится возможным их удержание лишь за счет квадрупольного магнитного поля [13; 15]. Путём фотоионизации атомов, захваченных в магнитную ловушку, получают распределение плотности плазмы с цилиндрической симметрией и наличием выраженного пика плотности. Такое распределение называется экспоненциальным и хорошо аппроксимируется выражением [15]:

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{x^2 + (y^2 + z^2)/\eta}}{\sigma_0}\right), \quad (1.1.5.2)$$

здесь x , y и z – компоненты радиуса-вектора $\mathbf{r}$, η – параметр.

После фотоионизации, магнитооптическая ловушка не способна удерживать плазму, поэтому она либо свободно разлетается в окружающий её вакуум, как, например, в [6], либо разлетается во внешнем квадрупольном магнитном поле, как, например, в [16]. В обоих случаях магнитооптическая ловушка отключается. Во втором случае магнитное поле требуемой величины создается дополнительной парой катушек.

Ниже дана сводка различных параметров и условий, характерных для эксперимента [6–8; 14; 16]:

- в качестве исходных выступают такие элементы, как Li, Rb, Ca, Sr, Xe;
- начальная температура электронов T_{e0} лежит в диапазоне от 1 до 1000 К;
- начальная температура ионов T_{i0} составляет величину порядка 1 мК;
- начальная концентрация плазмы n_0 лежит в диапазоне от 10^6 до 10^{11} см $^{-3}$;
- число ионов N составляет величину порядка $10^5 - 10^7$;
- начальный размер плазмы σ_0 лежит в диапазоне от 200 до 1500 мкм;
- плазма расширяется в вакуум;
- при необходимости прикладываются внешние электромагнитные поля.

1.2 Диагностика ультрахолодной плазмы

Диагностика плазмы строится на косвенных измерениях, а сами методы могут быть разделены на две группы, каждая из которых обладает своими особенностями. Рассмотрим физические принципы, лежащие в основе этих методов.

1.2.1 Детектирование внешним электрическим полем

Детектирование заряженных частиц с помощью электрического поля применимо как к ионам, так и к электронам [7; 8]. Этот метод является единственным

способом диагностики электронов плазмы.

К плазме прикладывают внешнее электрическое поле. Обычно это делают при помощи двух сеток, помещаемых в магнитооптическую ловушку, между которыми имеется разность потенциалов. Оказавшись во внешнем электрическом поле, частицы ускоряются и направляются к детектору, например к микроканальной пластине [8], формируя измеряемый сигнал. Поскольку внешнее электрическое поле может повлиять на время существования плазмы, то величину его напряженности ограничивают. Обычно, это значения не более $E = 5 \text{ мВ/см}$ [7]. В связи с малым значением напряжённости, такой метод не является эффективным. Кроме того, частицы достигают детектора с некоторой задержкой. Заметим, что возможны и более высокие значения напряженности, например $E = 100 \text{ В/см}$ [7].

Метод позволяет получать информацию о пространственном распределении частиц определенного знака в различные моменты времени. Так как реализация метода подразумевает проектирование частиц на плоскость, то, по результатам измерений, становится возможным построение двумерных функций распределения плотности частиц плазмы.

1.2.2 Оптические методы

Оптические методы применимы только для диагностики ионов и позволяют получать распределения их температуры и плотности. Различают два различных метода, каждый из которых обусловлен наличием соответствующих переходов между энергетическими уровнями у некоторых веществ, например, таких как Ca и Sr.

Метод флуоресценции [17] состоит в следующем. Зондирующий лазер настраивается в резонанс с некоторым переходом между энергетическими уровнями иона и подсвечивает часть облака плазмы. Затем регистрируется спонтанное излучение подсвеченных ионов.

Имеют место следующие допущения. Атом, движущийся со скоростью v ,

параллельно направлению лазерного луча, имеет Лоренцевский профиль рассеяния, пропорциональный $[(v/b)^2 + 1]^{-1}$, где $b = \gamma\lambda/2$ это скорость, соответствующая Допплеровскому сдвигу, равному естественной ширине линии, γ – естественная ширина линии, а λ – длина волны перехода между энергетическими уровнями [17]. Если начальное распределение скоростей атомов Максвелловское, то сигнал s , пропорциональный произведению распределений Лоренца и Гаусса, полученный от многократного измерения фиксированного участка в различные моменты времени, зависит от кинетической энергии ионов [7; 17]:

$$s(t) \propto \frac{1}{v_{\text{th}}} \exp\left(-\frac{b^2}{2v_{\text{th}}^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2}v_{\text{th}}}\right), \quad (1.2.2.1)$$

где v_{th} – тепловая скорость. Если величина v_{th} известна в какой-либо начальный момент времени, то из зависимости $s(t)$ можно получить зависимость $v_{\text{th}}(t)$.

Путем измерений различных областей получают не только временные, но и пространственные характеристики.

Метод визуализации поглощения [18], в отличие от предыдущего метода, основан не на рассеянии излучения, а на его поглощении. Вначале регистрируется интенсивность $I_b(x, y)$ в отсутствии плазмы. Затем, зондирующий лазер настраивается в резонанс с некоторым энергетическим переходом иона, в результате чего происходит поглощение излучения. Интенсивность после поглощения $I_p(x, y)$ тоже регистрируется. Оптическая глубина связана распределением плотности $n(\mathbf{r})$ ионов и распределением их температур $T_i(\mathbf{r})$ [7; 18]:

$$\ln \frac{I_b(x, y)}{I_p(x, y)} = \int n(\mathbf{r}) \alpha(\omega_1, T_i(\mathbf{r})) dz, \quad (1.2.2.2)$$

где $\alpha(\omega_1, T_i(\mathbf{r}))$ – сечение поглощения ионов, которое зависит от кинетической энергии ионов, так как, их движение обуславливает Допплеровское уширение спектральных линий.

Проводя измерения с различной задержкой, получают распределения плотности ионов и их температуры, зависящие не только от координат, но и от времени.

1.3 Особенности расширения плазмы в вакуум

В этом разделе приводится описание основных экспериментальных результатов для случая свободного расширения. Сами результаты приведены в хронологическом порядке, т.е. начиная с момента фотоионизации и далее.

1.3.1 Нарушение электронейтральности

Сразу после создания, число электронов $N_{e,exte}$ равно числу ионов N_i и плазма нейтральна. Затем, за короткий промежуток времени часть электронов покидает плазму [6]. На Рис. 1.3.1.1, взятом из работы [6] изображены сигнал электронов (см. раздел 1.2) и величина детектирующего поля в зависимости от времени, для различных плотностей плазмы. Во всех случаях первые пи-

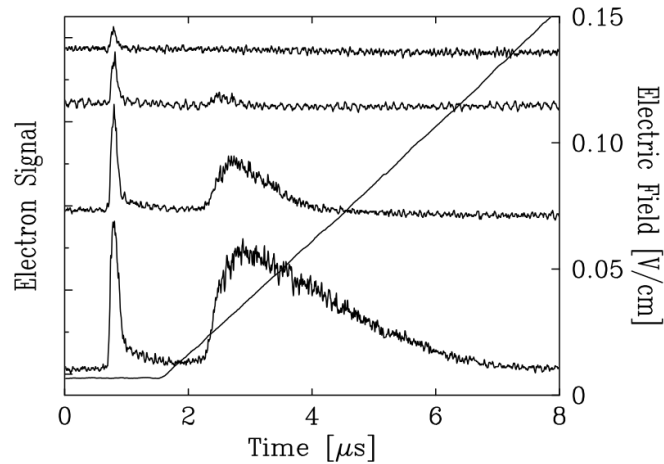


Рис. 1.3.1.1: Электронный сигнал [6] и величина детектирующего поля (В/см) для различных значений n_0 в зависимости от времени (мкс).

ки электронного сигнала наблюдаются при малом значении детектирующего поля. Эти пики обусловлены тем, что часть электронов покинувшая плазму, легко увлекается внешним полем. Как видно из Рис. 1.3.1.1, начиная с некоторого момента, величина детектируемого поля линейно возрастает в зависимости от времени. В результате детектируется второй пик электронного сигнала, растянутый во времени. Он обусловлен тем, что нескомпенсированное поле ионов создает электрическую потенциальную яму для оставшихся электронов.

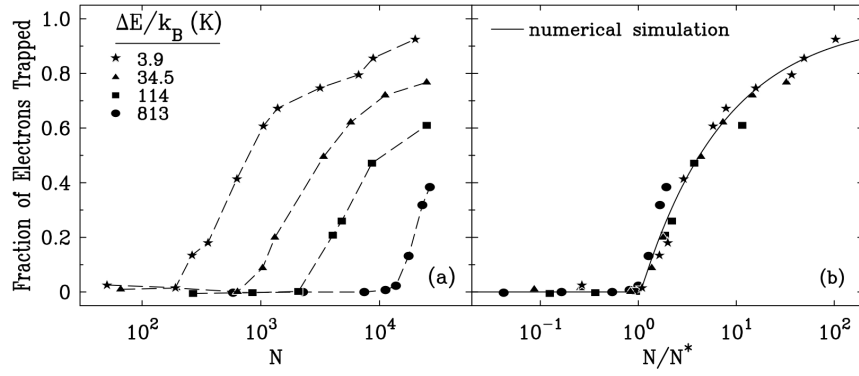


Рис. 1.3.1.2: Доля электронов в плазме [6] для различных T_{e0} и N_i : (a) до нормировки; (b) после нормировки.

На Рис. 1.3.1.2, взятом из работы [6], приведена зависимость доли захваченных электронов от числа ионов в плазме. Как видно из Рис. 1.3.1.2(a), с увеличением числа ионов доля захваченных электронов растет. Нормировка данных на некоторую величину N^* позволяет расположить все результаты на одной кривой, что изображено на Рис. 1.3.1.2(b).

Величина N^* имеет смысл минимального числа ионов, необходимых для того, что бы захватить хотя бы один электрон при данных параметрах плазмы. Она определяется следующим образом [7]:

$$N^* = \frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}k_b\sigma_0T_{e0}}{e^2} \quad (1.3.1.1)$$

где e – элементарный заряд.

Доля электронов, оставшихся в плазме, хорошо аппроксимируется выражением [7]:

$$\frac{N_e}{N_i} = \frac{\sqrt{N_i/N^*} - 1}{\sqrt{N_i/N^*}}. \quad (1.3.1.2)$$

1.3.2 Поведение кинетической энергии ионов

Сразу после фотоионизации ионы быстро разогреваются. Затем, в течение ограниченного времени, их кинетическая энергия испытывает колебания [19]. Оба явления видны на Рис. 1.3.2.1(a), взятом из работы [19], где изображены зависимости эффективной температуры ионов $T_{i,\text{eff}}$ от времени для различных

значений начальной плотности плазмы.

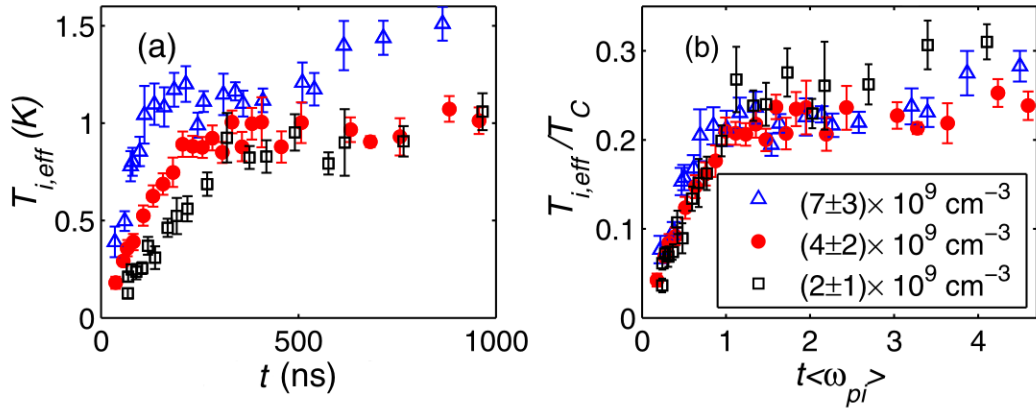


Рис. 1.3.2.1: Зависимости эффективной температуры ионов [19] T_i от времени для различных значений плотности n_0 : (a) $T_i(t)$; (b) $T_i/T_C(t \cdot \omega_{pi})$.

Как отмечено в разделе 1.1.5, сразу после создания плазмы температура ионов не превосходит величину в 1 мК. Тем не менее, за время порядка 0.1 мкс, температура ионов достигает значения порядка 1 К. Это вызвано тем, что сразу после фотоионизации распределение ионов повторяет распределение исходных атомов и не является энергетически выгодным. Стремление системы перейти в равновесное состояние приводит к разогреву ионов (“disordered-induced heating”) [19].

Затем возникают колебания температуры ионов, что свидетельствует о некотором локальном равновесии. В качестве единицы времени в [19] выбрана ионная плазменная частота:

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{4\pi n_i e^2}{m_i}}. \quad (1.3.2.1)$$

В качестве единицы нормировки температуры ионов выбрана величина [19]:

$$T_C = \frac{e^2}{4\pi a k_b}, \quad (1.3.2.2)$$

где $a = \sqrt[3]{4\pi n_i/3}$ – радиус Вигнера-Зейтца.

При таком выборе масштабов все кривые практически совпадают, что изображено на Рис. 1.3.2.1(b).

Авторы [19] считают, что колебания температуры ионов связаны с потенциальной ямой, возникающей вследствие их экранировки [19].

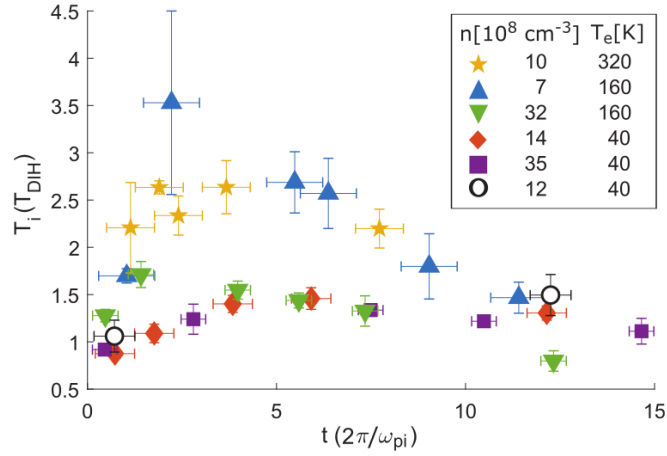


Рис. 1.3.2.2: Зависимость [15] T_i/T_c от времени для различных T_{e0} и n_0 .

На Рис. 1.3.2.2, взятом из работы [15] изображены зависимости T_i/T_c от $t \cdot 2\pi/\omega_{pi}$ при различных начальных n_0 и T_{e0} . Важно отметить, что здесь имеет место экспоненциальное начальное распределение плотности [15]. Как видно, для этого случая тоже характерен быстрый разогрев ионов. Однако колебания ионной температуры не обнаруживаются.

1.3.3 Электронные колебания

Эксперименты [20; 21] показывают, что, как и для всякой плазмы, для ультрахолодной плазмы характерны колебания электронной плотности. В обоих экспериментах, для детектирования колебаний, использовали модификацию метода с применением внешнего электрического поля (см. раздел 1.2), заключающуюся в дополнительном приложении к плазме переменного электрического поля частотой f . В работе [20], измерялся электронный сигнал, а в работе [21] поглощение приложенного переменного поля.

На Рис. 1.3.3.1(a), взятом из работы [20], изображён электронный сигнал, полученный при использовании дополнительного переменного электрического поля. Это поле приводит к образованию дополнительного пика (между двумя,

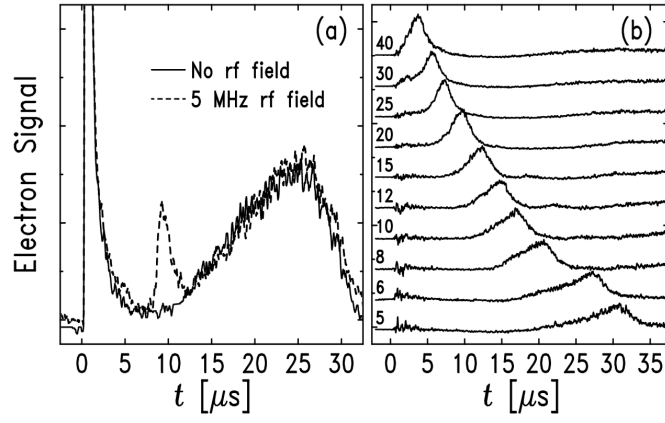


Рис. 1.3.3.1: Электронный сигнал [20] плазмы во внешнем электрическом поле: (а) постоянное поле и переменное поле частотой 5 МГц; (б) поле с частотой 5-40 МГц.

см. 1.3.1). Который возникает, если внешнее электрическое поле находится в резонансе с плазменной частотой [20].

По мере расширения плазмы её средняя концентрация $\bar{n}$ уменьшается. Поэтому резонансный отклик наблюдается позже, на более низких частотах [20]. Это изображено на Рис. 1.3.3.1(b).

1.3.4 Акустические колебания ионов

В плазме возможно возбуждение не только электронных, но и ионных колебаний. Так, в эксперименте [22] возбуждаются акустические ионные колебания путем модуляции начального распределения плотности ионов. Для этого процесс фотоионизации (см. раздел 1.1.4) несколько изменен. Ионизирующий лазерный импульс вначале проходит через маску с периодом λ_0 , находящуюся перед облаком нейтральных атомов, а затем отражается от зеркала в обратном направлении. Таким образом, возникает модуляция плотности с длиной волны λ_0 .

Дисперсионное соотношение, полученное из соображений магнитной гидродинамики, в предположении бесконечной однородной среды, оказывается справедливым для ультрахолодной плазмы [22]:

$$\left(\frac{\omega_a}{k}\right)^2 = \frac{k_b T_e}{m_i(1 + k^2 r_d^2)}, \quad (1.3.4.1)$$

где ω_a – частота звуковых колебаний, а $r_d = \sqrt{T_e/4\pi e^2 n}$ – радиус экранировки.

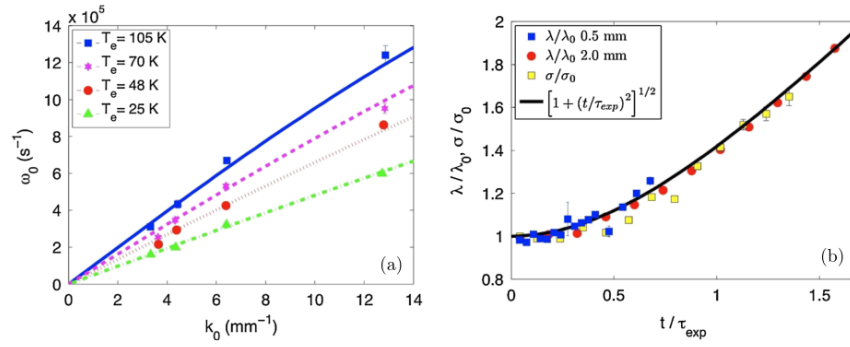


Рис. 1.3.4.1: Зависимости [22]: (а) дисперсионного соотношения для различных T_{e0} . Линии соответствует выражению (1.3.4.1), а символы эксперименту. (б) длины волны ионных колебаний и размера плазмы, отнесенных к начальным значениям, в зависимости от времени для $T_{e0} = 70 \text{ K}$ и двум различным периодам модулирующей маски.

На Рис. 1.3.4.1(а), взятом из работы [22], приведены дисперсионные соотношения, получаемые из (1.3.4.1), для различных начальных температур электронов, в сравнении с экспериментальными.

Рис. 1.3.4.1(б), взятом из работы [22], приведены зависимости размеров плазмы σ/σ_0 и длин волн ионных колебаний λ_a/λ_0 от времени. Видно, что изменение длины волны оказывается связанным с изменением размера плазмы. Сплошной линией изображена зависимость $\sigma(t)/\sigma_0$, даваемая выражением (1.3.5.1) [при $\beta = 1$].

1.3.5 Динамика распределения плотности

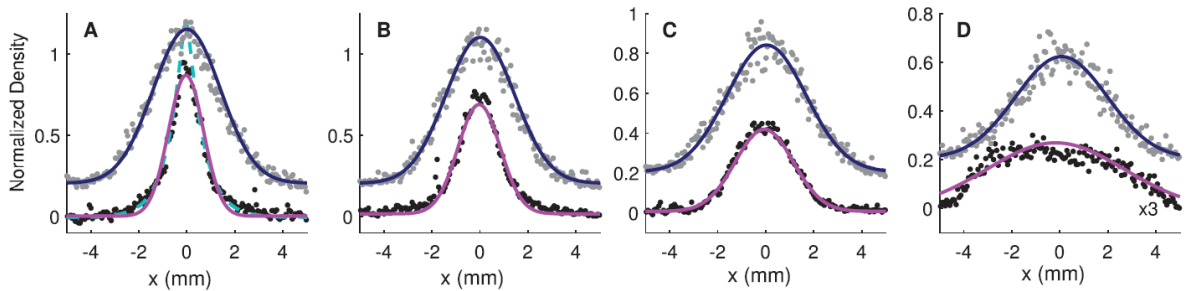


Рис. 1.3.5.1: Распределения плотности плазмы [15] в различные моменты времени (слева направо): $t = 0.34 \text{ мкс}$, $t = 5.7 \text{ мкс}$; $t = 14 \text{ мкс}$; $t = 27 \text{ мкс}$ для нормального (верх) и экспоненциального (низ) распределений.

Естественным является вопрос о временной зависимости распределения плотности плазмы.

На Рис. 1.3.5.1, взятом из работы [15], приведены нормированные функции распределения плотности плазмы для нормального и экспоненциального случаев и четырёх различных моментов времени. Верхние кривые соответствуют нормальному распределению, а нижние экспоненциальному. В первом случае вид распределения сохраняется, что позволяет сделать предположение об автомодельном характере процесса расширения. Во втором случае распределение заметно искажается с течением времени [15].

Размер плазмы σ изменяется во времени следующим образом [22]:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\beta \tau_{\text{exp}}} \right)^2}, \quad (1.3.5.1)$$

где $\tau_{\text{exp}} = \sqrt{m_i \sigma_0 / k_b T_{e0}}$ – характерное время расширения плазмы, β – параметр приближения.

Для нормального распределения результат, даваемый выражением (1.3.5.1) при $\beta = 1$, изображён (сплошная) на Рис. 1.3.5.2, взятом из [15], и согласуется с экспериментом (куги).

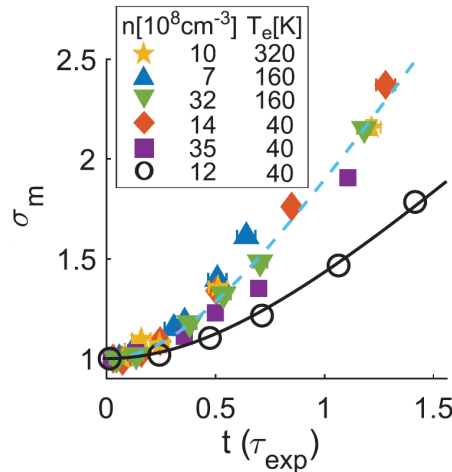


Рис. 1.3.5.2: Зависимость [15] размера плазмы σ_m от времени для различных n_0 и T_{e0} и различных распределений: экспоненциальное (сплошные символы), нормальное (куги), результаты (1.3.5.1) при $\beta = 1$ (сплошная линия) и $\beta = 0.67$ (пунктир).

В случае экспоненциального распределения, поскольку оно заметно искажа-

ется с течением времени, выражение (1.3.5.1) даёт удовлетворительный результат при $\beta = 0.67$ [15]. Это изображено на Рис. 1.3.5.2 пунктиром.

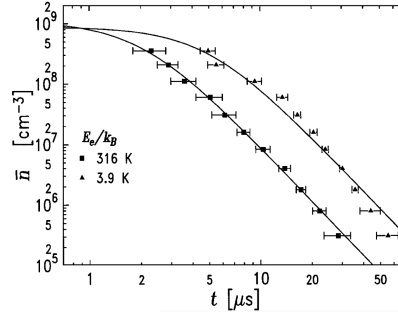


Рис. 1.3.5.3: Зависимости [20] средней концентрации ионов от времени для двух различных начальных температур электронов: $T_{e0} = 316$ K (квадраты, эксперимент), $T_{e0} = 3.9$ K (треугольники, эксперимент), сплошные линии – теоретический результат.

На Рис. 1.3.5.3, взятом из работы [20] приведены зависимости средней концентрации ионов плазмы от времени, полученные путём обработки данных о электронных колебаниях (см. раздел 1.3.3) для случая нормального распределения плотности плазмы. Она зависит от времени следующим образом [20]:

$$\bar{n}_i = \frac{N}{[4\pi(\sigma_0^2 + v_{\text{rms}}^2 t^2)]^{3/2}}, \quad (1.3.5.2)$$

где $v_{\text{rms}} = \sqrt{E_e/\alpha m_i}$ – среднеквадратичная скорость ионов на больших временах и $\alpha = 1.7$ – параметр приближения.

1.4 Особенности расширения плазмы в электромагнитных полях

Активно ведётся работа по изучению воздействия внешних электромагнитных полей на плазму. Так, эксперимент [23] проведен в слабых однородных скрещенных электрических и магнитных полях. В экспериментах [24–26] плазма находится во внешнем однородном магнитном поле. Внешнее квадрупольное магнитное поле применяется в работах [14; 16].

1.4.1 Динамика распределения плотности

В однородном магнитном поле проведены эксперименты [24–26]. В работе [24] изучался процесс расширения плазмы Хе поперек силовых линий магнитного поля. Аналогичный вопрос рассматривался в [25], но для плазмы атомов Са. В обоих случаях начальное распределение плотности нормальное.

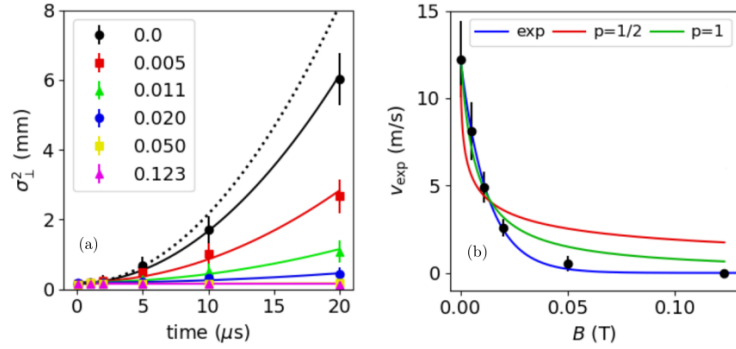


Рис. 1.4.1.1: Зависимости [25]: (a) $\sigma_{\perp}^2$ от времени для различных значений индукции магнитного поля; (b) v_{exp} от B для различных значений параметра p .

Оба эксперимента показывают, что с течением времени вид функции распределения плотности ионов плазмы сохраняется. Однако сам процесс расширения происходит с меньшей скоростью. На Рис. 1.4.1.1(a), взятом из работы [25], изображена зависимость дисперсии ионов $\sigma_{\perp}$ от времени, поперёк линий магнитного поля, для различных значений индукции B . Пунктирная линия соответствует случаю $B = 0$.

В работе [24] индукция магнитного поля составляла 20 Гс и 50 Гс при $T_{e0} = 100$ К. В этих условиях скорость поперечного расширения плазмы оказывается следующей:

$$v_{\text{exp}} \propto B^{-1/2}. \quad (1.4.1.1)$$

В работе [25] индукция магнитного поля менялась в более широком диапазоне: от 50 до 1230 Гс. Для описания зависимости v_{exp} от B получены следующие

выражения [25]:

$$\begin{aligned} v_{\text{exp}} &= a(b + B)^{-p}, \\ v_{\text{exp}} &= a \cdot \exp\left(-\frac{B}{b}\right), \end{aligned} \quad (1.4.1.2)$$

где a , b и p – параметры приближения.

На Рис. 1.4.1.1(b) приведена зависимость v_{exp} от B для обоих случаев. Видно, что экспоненциальная зависимость лучше согласуется с экспериментальными данными.

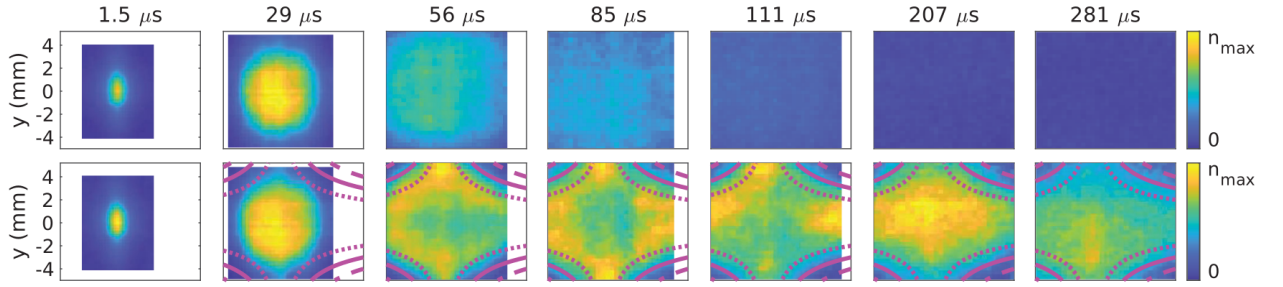


Рис. 1.4.1.2: Эволюция распределения плотности плазмы во времени [16] в отсутствии (верхний ряд) и при наличии квадрупольного магнитного поля (нижний ряд). Пунктирные линии изображают магнитное поле. Нормировка в каждый момент времени различна: $n_{\text{max}} = [13.8; 1.7; 0.59; 0.36; 0.25; 0.18; 0.18] \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$.

Воздействие квадрупольного магнитного поля изучено в эксперименте [16]. Плазма получена из атомов Sr, а начальное распределение плотности ионов экспоненциальное. Квадрупольное магнитное поле характеризуется градиентом $B = 150 \text{ Гс/см}$, направленным вдоль оси симметрии поля.

На Рис. 1.4.1.2, взятом из работы [16], изображена эволюция распределения плотности плазмы во времени, как без магнитного поля, так и при его наличии. Видно, что магнитное поле обеспечивает анизотропный характер расширения плазмы.

На Рис. 1.4.1.3, взятом из работы [16], изображено изменение относительной максимальной плотности во времени, для различных начальных условий. Видно, что при наличии магнитного поля плазма расширяется медленнее.

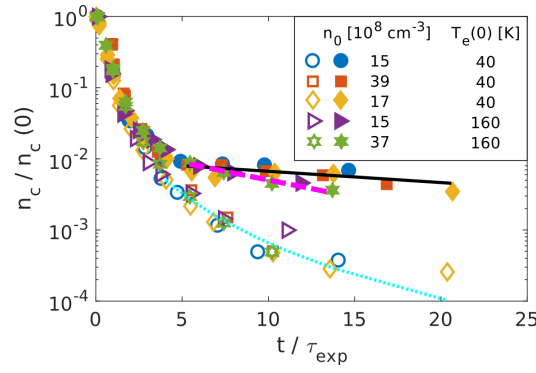


Рис. 1.4.1.3: Зависимости [16] $n/n_0(t/\tau_{exp})$ для различных n_0 и T_{e0} и двух значений градиента магнитного поля: $B = 0$ (выколотые символы), $B = 150$ Гс/см (сплошные символы).

1.4.2 Колебания гидродинамической скорости

Колебания гидродинамической скорости наблюдаются при внешнем воздействии на плазму как однородным [26], так и квадрупольным магнитным полем [16].

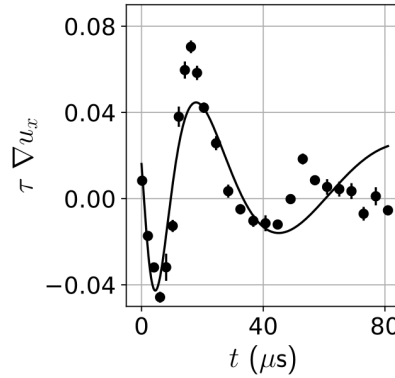


Рис. 1.4.2.1: Зависимость [26] $u_x(t)$ в однородном магнитном поле, эксперимент (круги), аппроксимация (1.4.2.1) (сплошная).

В эксперименте [26] измерение проведено методом флуоресценции (см. раздел 1.2). Плоский лазерный луч толщиной 1 мм, пересекает облако плазмы в центре так, что направление его распространения перпендикулярно силовым линиям магнитного поля.

Измеряемая в центре плазмы компонента гидродинамической скорости u_x меняет знак с течением времени. Это изображено на Рис. 1.4.2.1, взятом из работы [26]. Авторы работы [26] пытаются объяснить явление с помощью аку-

стических колебаний. При этом используется выражение [26]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a}{(1 + t^2/\tau_{\text{exp}}^2)^{1/4}} \sin \left[b \cdot \frac{t/\tau_{\text{exp}}}{(1 + t^2/\tau_{\text{exp}}^2)^{1/4}} + c \right] + d, \quad (1.4.2.1)$$

где a , b , c , d – параметры приближения. Сплошная линия на Рис. 1.4.2.1 изображает эту зависимость.

В случае квадрупольного магнитного поля, авторы эксперимента [16] подобной зависимости не приводят, хотя отмечают факт изменения знака u_x с течением времени в отдельно взятых точках. Авторы работы [16] связывают явление с влиянием так называемого магнитного зеркала.

1.4.3 Высокочастотная дрейфовая неустойчивость электронов

В эксперименте [23] показано, что при расширении плазмы в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях наблюдается неустойчивость электронов.

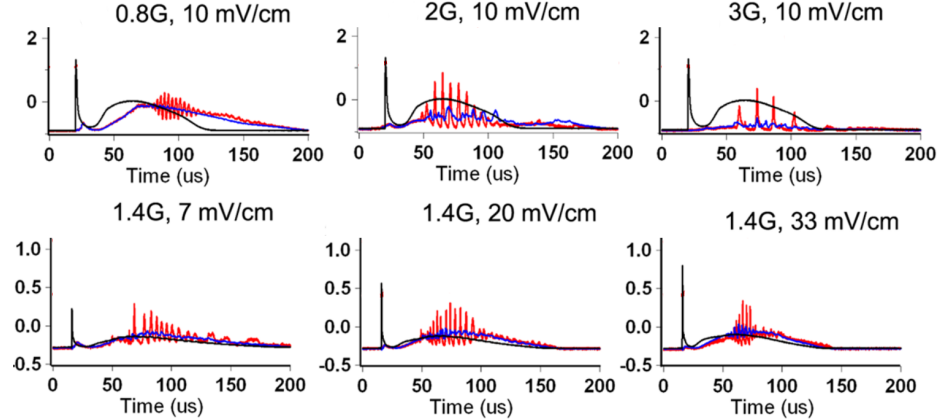


Рис. 1.4.3.1: Зависимости [23] электронного сигнала от времени. Верх: $E = 10$ мВ/см, $B = 0.8, 2, 3$ Гс. Низ: $B = 1.4$ Гс, $E = 7, 20, 33$ мВ/см. Всюду черная линия – сигнал без магнитного поля, красная линия – единичное измерение, синяя линия – среднее за 40 измерений.

На Рис. 1.4.3.1, взятом из работы [23], изображены электронные сигналы (см. раздел 1.2) для различных значений индукции магнитного поля B и напряженности электрического поля E . С ростом B , при фиксированном значении E , наблюдается увеличение амплитуды сигнала и уменьшение частоты пиков. При

фиксированном значении B , с увеличением E ситуация обратная. Такая ситуация идентифицируется как дрейфовая неустойчивость электронов. При этом возникает дрейф электронов со скоростью $V_d = E/B$ в направлении $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ [23]. Рис. 1.4.3.2, взятый из работы [23], демонстрирует зависимость частоты пиков

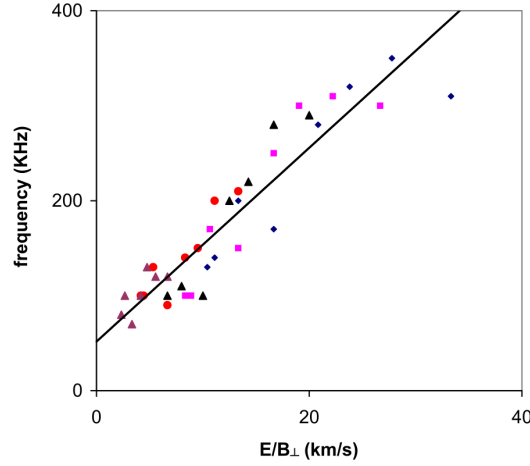


Рис. 1.4.3.2: Зависимость [23] частоты пиков электронного сигнала от величины дрейфовой скорости $V_d = E/B$.

измеряемого электронного сигнала от V_d .

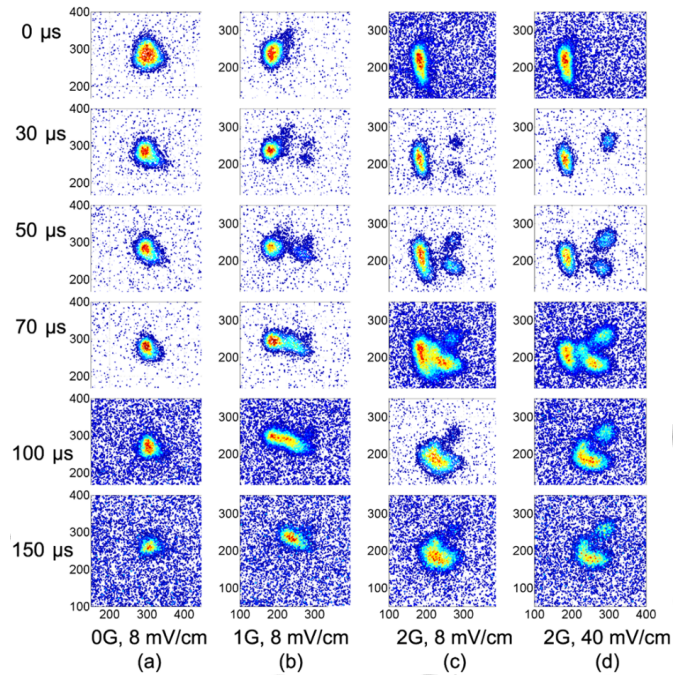


Рис. 1.4.3.3: Электроны плазмы в различные моменты времени [23]: (a) $B = 0$ Гс, $E = 8$ мВ/см; (a) $B = 1$ Гс, $E = 8$ мВ/см; (a) $B = 2$ Гс, $E = 8$ мВ/см; (a) $B = 2$ Гс, $E = 40$ мВ/см. Размеры указаны в пикселях, 1 пиксель равен 150 мкм [23].

На Рис. 1.4.3.3, взятом из [23] приведены проекции электронов плазмы в различные моменты времени для различных конфигураций внешних полей. Воздействие скрещенных полей приводит к тому, что электронная компонента плазмы разделяется на част. Авторы [23] отмечают, что вид проекций не объясняет электронный сигнал, приведенный на Рис. 1.4.3.1.

1.5 Теоретические результаты

Рассмотрим теперь основные теоретические подходы, применяемые к описанию ультрахолодной плазмы. В частности, отметим некоторые особенности методик, применяемых при моделировании ультрахолодной плазмы.

1.5.1 Кинетический подход

В случае нормального распределения плотности, зависимости параметров ультрахолодной плазмы от времени можно получить аналитически. Для этого используется подход, основанный на решении кинетического уравнения, приведенный в работе [7].

В случае отсутствия столкновений в плазме, кинетическое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial f_{e,i}}{\partial t} + \mathbf{v}_{e,i} \frac{\partial f_{e,i}}{\partial \mathbf{r}_{e,i}} - \frac{\partial f_{e,i}}{m_{e,i} \partial \mathbf{v}_{e,i}} q_{e,i} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_{e,i})}{\partial \mathbf{r}_{e,i}} = 0, \quad (1.5.1.1)$$

где $q_{e,i}$ – заряд для электрона или иона соответственно, а потенциал φ подчиняется уравнению Пуассона:

$$\Delta \varphi = 4\pi e(\rho_e - \rho_i), \quad (1.5.1.2)$$

где $\rho_{e,i} = \int f_{e,i} d\mathbf{v}_{e,i}$.

Время релаксации электронов гораздо меньше ионного, поскольку $m_e \ll m_i$. Поэтому уместно рассматривать динамику ионов в предположении того, что для электрона плотность вероятности в фазовом пространстве квазистационар-

на:

$$f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \rho_e(\mathbf{r}, t) \phi_e^{(qs)}(\mathbf{v}, T_e(t)) \sim \rho_e(\mathbf{r}, t) \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2k_b T_e(t)}\right), \quad (1.5.1.3)$$

где функция распределения скоростей электронов $\phi_e^{(qs)}$ зависит от времени неявно, посредством $T_e(t)$.

В предположении $\rho_i(\mathbf{r}) \approx \rho_e(\mathbf{r})$, из уравнений (1.5.1.1) и (1.5.1.3) следует уравнение для усреднённого потенциала, зависящего от плотности ионов:

$$e \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} = k_b T_e \frac{\partial \rho_e}{\rho_e \partial \mathbf{r}} \approx k_b T_e \frac{\partial \rho_i}{\rho_i \partial \mathbf{r}}. \quad (1.5.1.4)$$

Начальное распределение ионов нормальное, поэтому:

$$f_i \sim \exp\left(-\sum_k \frac{r_k^2}{2\sigma_k^2}\right) \cdot \exp\left(-m_i \sum_k \frac{(v_k - \gamma_k r_k)^2}{2k_b T_i}\right), \quad (1.5.1.5)$$

где $k = x, y, z$, γ_k – параметр, локальное среднее распределения скорости.

Сферическая симметрия распределения и сохранение его вида во времени (см. раздел 1.3.5) позволяет описывать процесс расширения плазмы $T_{e,i}$, γ_k , σ_k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^2}{\partial t} &= 2\gamma\sigma^2 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \frac{k_b T_e + k_b T_i}{m_i \sigma^2} - \gamma^2 \\ \frac{\partial T_e}{\partial t} &= -2\gamma k_b T_e \\ \frac{\partial T_i}{\partial t} &= -2\gamma k_b T_i. \end{aligned} \quad (1.5.1.6)$$

Поскольку энергия сохраняется, а плазма расширяется адиабатически, то:

$$\begin{aligned} E &= \frac{3N_i k_b (T_e + T_i)}{2} + \frac{3N_i m_i \gamma^2 \sigma^2}{2} \\ \sigma T_e^2 &= \text{const} \\ \sigma T_i^2 &= \text{const}, \end{aligned} \quad (1.5.1.7)$$

здесь N_i – число ионов.

Система (1.5.1.6), учетом (1.5.1.7), имеет аналитическое решение:

$$\begin{aligned}\sigma^2(t) &= \sigma_0^2(1 + t^2/\tau_{\text{exp}}^2) \\ \gamma(t) &= \frac{t/\tau_{\text{exp}}^2}{1 + t^2/\tau_{\text{exp}}^2} \\ T_e(t) &= \frac{T_{e0}}{1 + t^2/\tau_{\text{exp}}^2} \\ T_i(t) &= \frac{T_{i0}}{1 + t^2/\tau_{\text{exp}}^2}\end{aligned}\tag{1.5.1.8}$$

где характерное время расширения плазмы определено как:

$$\tau_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{m_i \sigma_0^2}{k_b(T_{e0} + T_{i0})}}.\tag{1.5.1.9}$$

Скорость расширения плазмы есть [7]:

$$\mathbf{u}_{\text{exp}}(\mathbf{r}, t) = \gamma(t)\mathbf{r}.\tag{1.5.1.10}$$

Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными, особенно при повышении начальной температуры электронов [7].

Отметим, что первое выражение системы (1.5.1.8) применяется и в отсутствии сферической симметрии [15], а также при наличии сильного внешнего магнитного поля [26], путем добавления параметров аппроксимации. Причем, во втором случае выражение (1.5.1.9) является функцией магнитного поля.

1.5.2 Гибридная молекулярная динамика

Помимо аналитических подходов, для изучения ультрахолодной плазмы применяются и численные методы. Например, для получения более детальной информации о динамике ионов, в работах [27; 28] используется метод гибридной молекулярной динамики. При данном подходе для ионов решаются уравнения движения, в то время как электронная компонента плазмы заменена некоторым

средним полем:

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= 4\pi e(\rho_e - \rho_i) \\
\rho_e &= \exp\left(\frac{\varphi}{k_b T_e}\right) \int_0^b \exp(-x) x^{-3/2} dx \\
\frac{m_e v_{\text{esc}}^2}{2} &= \langle \varphi \rangle \\
m_i \ddot{\mathbf{r}}_j &= \frac{\partial \langle \varphi_e \rangle}{\mathbf{r}_j} + q^2 \sum_{k=1}^N \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{(r_j - r_k)^3},
\end{aligned} \tag{1.5.2.1}$$

где ρ_e – плотность электронов, а v_{esc} – минимальная скорость, необходимая для того, что бы электрон мог удалиться из данной точки, N – число ионов и предел интегрирования равен $b = m_e v_{\text{esc}}^2 / (2k_b T_e)$.

Авторы обосновывают такой подход значительно меньшим временем релаксации электронов в сравнении с ионами.

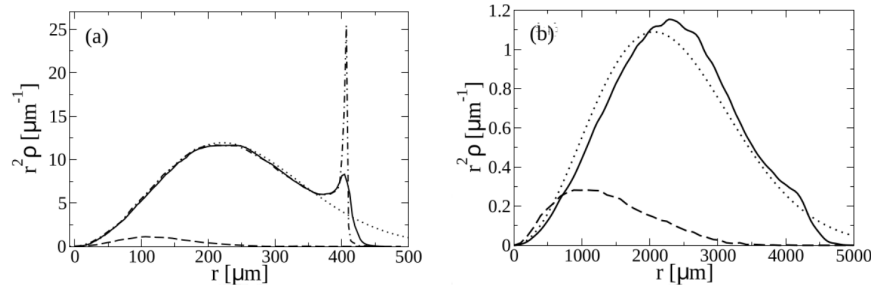


Рис. 1.5.2.1: Пространственная плотность ионов [27], полученная методом гибридной молекулярной динамики (сплошная), кинетической моделью (пунктир) и методом частиц-сетка (штрих-пунктир) в сравнении с нормальным распределением в различные моменты времени: (a) $t = 31\mu\text{s}$; (b) $t = 31\mu\text{s}$.

Рассмотрим теперь некоторые результаты. Из предложенной модели следует, что плазма расширяется из-за давления электронов, которое обусловлено их высокой, по отношению к ионам, температурой. На Рис. 1.5.2.1, взятом из работы [27], изображены распределения плотности ионов, даваемые методом гибридной молекулярной динамики (сплошная) в различные моменты времени. Из Рис. 1.5.2.1(a), где изображены зависимости для $t = 3$ мкс, видно образования пика плотности ионов, который затем исчезает. Моделирование проведено для $N = 4 \cdot 10^4$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 20 \text{ К}$. Примечательно, что кинетическая

модель (пунктирная кривая), используемая авторами, вообще не дает никакого всплеска в распределении плотности.

В рассматриваемых работах рассматривается и пространственное распределение температуры ионов, а также её зависимость от времени. При вычислении температуры ионов T_i учитываются лишь компоненты, перпендикулярные радиальному движению:

$$k_b T_i = \frac{m_i}{2} \left\langle \left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r} \right)^2 \right\rangle = \frac{m_i}{2} \langle v_{\perp}^2 \rangle. \quad (1.5.2.2)$$

На Рис. 1.5.2.2(a), приведенного в работе [28] изображены колебания ионной температуры при моделировании 10^6 ионов Sr с начальной концентрацией $n_0 = 2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$. Как видно из этого же рисунка, данные хорошо согласуются с экспериментальными.

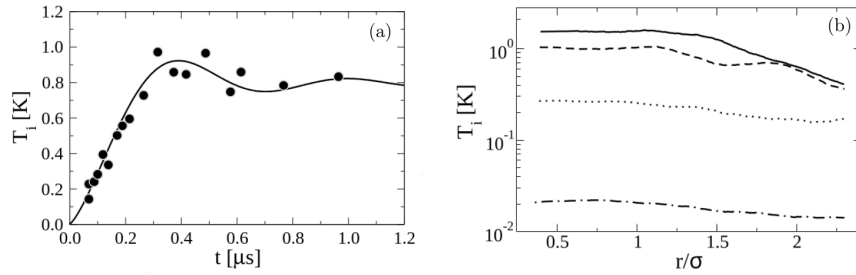


Рис. 1.5.2.2: Зависимости [28] T_i от (a) t модель (сплошная) в сравнении с экспериментом (круги); (b) r в различные моменты времени: $t = 0.3 \text{ мкс}$ (сплошная), $t = 1.5 \text{ мкс}$ (штрих), $t = 6.0 \text{ мкс}$ (пунктир) и $t = 25.3 \text{ мкс}$ (штрих-пунктир).

Пространственное распределение температур ионов в различные моменты времени изображено на Рис. 1.5.2.2(b), взятом из [27]. Видно, что со временем температура ионов не только понижается, но и достигает большей пространственной однородности.

1.5.3 Метод Монте-Карло и уравнения сплошной среды

В работе [29] ультрахолодная плазма моделируется методом Монте-Карло в сочетании с уравнениями сплошной среды. Этот метод немного отличается

от работы [30], опубликованной этими же авторами ранее, где используются уравнения баланса.

В отличие от работ [27; 28], авторы [29] настаивают на том, что необходимо более детальное моделирование электронов, поскольку они интенсивно двигаются из-за большей, в сравнении с ионами, начальной энергии и меньшей массы. Концентрации ионов $n_i(r)$ и электронов $n_e(r)$ вычисляются на радиальной сетке. Число ионов N_i заменяется на эффективное число $\tilde{N}_i$. Эти ионы движутся в среднем поле в соответствии с вторым законом Ньютона. При этом, каждая эффективная частица имеет вес $w = N_i/\tilde{N}_i$, в соответствии с которым она вносит вклад в распределение плотности $r^2 n_i(r)$. Электроны представлены аналогичным образом, при помощи величины $\tilde{N}_e$. Однако сила, действующая на электрон, обусловлена не только полем всех остальных ионов и электронов, но также столкновениями между частицами. Эти столкновения учитываются путем случайного изменения направления скорости электронов.

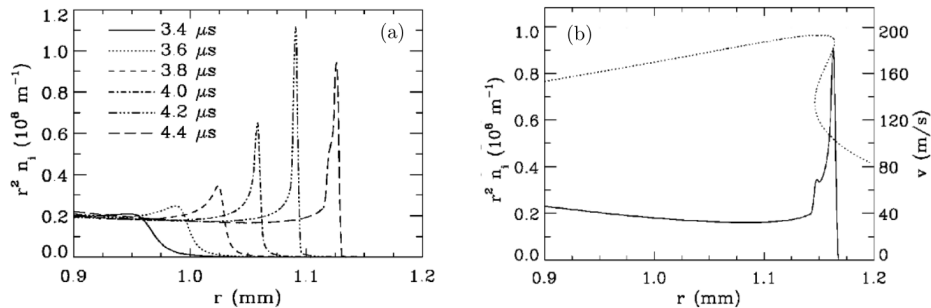


Рис. 1.5.3.1: Взвешенные ионные концентрации [29] n_i в зависимости от расстояния r : (a) в различные моменты времени $t = 3.4$ мкс (сплошная), $t = 3.6$ мкс (пунктир), $t = 3.8$ мкс (штрих), $t = 4.0$ мкс (штрих-пунктир) и $t = 4.2$ мкс (штрих-двойной пунктир); (b) Величина $n_i(r)$ (сплошная) и $v_i(r)$ (штрих) в момент времени $t = 4.6$ мкс.

При моделировании ультрахолодной плазмы с $T_{e0} = 100$ К и $n_0 = 10^9$ см $^{-3}$ в момент времени $t = 4.2$ мкс формируется пик в распределении плотности ионов. Процесс формирования пика показан на Рис. 1.5.3.1(a), взят из [29], где изображены взвешенные концентрации ионов в зависимости от расстояния в различные моменты времени. Рис. 1.5.3.1(b) изображены зависимости $n_i(r)$ и скорость ионов $v_i(r)$ в момент времени $t = 4.6$ мкс. Видно, что ионная скорость

достигает своего максимума в точке, соответствующей пику концентрации. Отмечается, что время формирования пика зависит от T_{e0} и начального размера плазмы σ_0 .

Заметим, что подобные искажения распределения ионов предсказывались и в низкотемпературной плазме, при численном решении одномерных уравнений магнитной гидродинамики [31–33].

В [29] показана и возможность возбуждения ионных колебаний при наличии начальной модуляции концентрации. Начальная концентрация задается как:

$$n_0 = \alpha \exp(-\beta r^2) \cdot (1 + \cos(kr)), \quad (1.5.3.1)$$

где α – нормировочный множитель и β – размер плазмы.

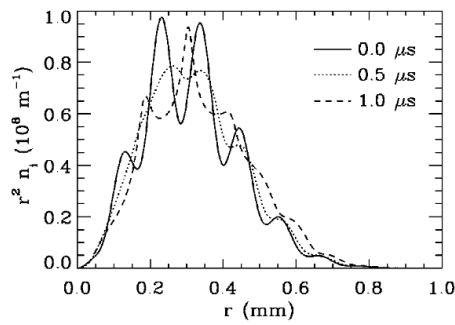


Рис. 1.5.3.2: Зависимость [29] $n_i(r)$ в различные моменты времени: $t = 0$ мкс (сплошная), $t = 0.5$ мкс (пунктир) и $t = 1$ мкс (штрих).

Рис.1.5.3.2 изображает зависимости $n_i(r)$ в различные моменты времени. По мере расширения плазмы наблюдаются ионные акустические колебания с частотой $\omega_{ac} = k \sqrt{k_b T_{e0} / m_i}$, где $k = 6\pi / 340$ мкм.

Наличие таких колебаний показано экспериментально, в работе [22].

Глава 2. Моделирование

Данная глава посвящена особенностям математической модели ультрахолодной плазмы, используемым численным методам и некоторым вопросам программирования вычислений. Это представляется важным, поскольку разработанные в рамках данной работы программы являются основным инструментом для получения данных об ультрахолодной плазме. Результаты анализа этих данных изложены в разделах 3, 4 и 5.

2.1 Метод молекулярной динамики

Метод молекулярной динамики широко используется для моделирования разнообразных биологических [34; 35], химических [36; 37] и физических [38–40] систем. Суть метода состоит в решении задачи многих тел. При этом интегрируются уравнения движения для взаимодействующих частиц, испытывающих на себе действие различных сил.

Число частиц в эксперименте по ультрахолодной плазме обычно лежит в диапазоне от 10^6 до 10^7 [15; 24; 25]. Начальный размер ультрахолодной плазмы относительно невелик. Поскольку начальная пиковая концентрация её частиц сравнительно невысока (см. раздел 1.1.5), а, с течением времени, плазма только расширяется, то среднее расстояние между частицами сравнительно велико. При этом, в работах [27–29], показано, что, в ультрахолодной плазме кулоновские столкновения могут играть значительную роль. Однако, при начальной температуре электронов $T_{e0} > 6$ К рекомбинация частиц пренебрежимо мала [14]. Эти условия позволяют рассматривать ультрахолодную плазму как классическую систему из точечных зарядов, взаимодействующих друг с другом по закону Кулона. В связи с этим, для моделирования ультрахолодной плазмы целесообразно использовать метод классической молекулярной динамики, поскольку он естественным образом учитывают как самосогласованное электри-

ческое поле плазмы, так и столкновения между частицами.

Наконец, наличие данных о движении отдельных частиц, в совокупности с обширными экспериментальными данными, позволяет лучше понять процессы, протекающие в ультрахолодной плазме и дополнить результаты, получаемые с помощью таких методов, как магнитная гидродинамика [41].

2.1.1 Взаимодействие частиц и уравнения движения

Вначале введём следующие обозначения. Число ионов в плазме равно числу электронов $N_i = N_e = N$. Некоторая частица имеет номер j , а её масса m_j равна либо массе иона, либо массе электрона. Поскольку ионы плазмы заряжены однократно, то заряд q_j частицы j равен заряду электрона, взятому с соответствующим знаком $q_j = \pm e$.

Частицы плазмы взаимодействуют друг с другом по закону Кулона, поэтому потенциальная энергия взаимодействия частицы j с остальными имеет вид:

$$U_j = \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{q_j \cdot q_k}{r_{jk}}, \quad (2.1.1.1)$$

где $r_{jk} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|$ – расстояние между частицами.

Отсутствие минимума потенциальной энергии может приводить к численным трудностям при вычислении взаимодействия зарядов противоположного знака. Однако ультрахолодная плазма достаточно разреженная система и среднее расстояние между частицами, во всяком случае, по порядку величины не менее 10^{-4} см. Более того, с течением времени оно только увеличивается. Несколько забегаая вперёд, отметим, что в рамках данной работы начальная температура электронов $T_{e0} \geq 10$ К. При такой температуре рекомбинация частиц пренебрежимо мала [14] и необходимости учёта квантовых явлений нет.

Вышеуказанное позволяет сдвинуть потенциал взаимодействия вправо на малую величину [1–3; 5]:

$$r_0 \propto \alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{n_0}}, \quad (2.1.1.2)$$

где $\alpha \ll 1$.

Таким образом, выражение для потенциальной энергии примет вид:

$$U_j = \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{q_j \cdot q_k}{r_{jk} + r_0}. \quad (2.1.1.3)$$

Теперь при $r_{jk} = 0$ значение U_j конечно. Такая модификация ведёт к искажению электрического поля точечного заряда при $r_{jk} \approx r_0$ и уменьшает абсолютную величину силы взаимодействия между зарядами. Таким образом, частицы с зарядом противоположного знака притягиваются слабее, а частицы с зарядом одного знака отталкиваются слабее. Однако при $r_{jk} \gg r_0$ потенциал взаимодействия практически совпадает с кулоновским и искажение пренебрежимо мало.

В рамках данной работы величина сдвига потенциала фиксирована и равна $r_0 = 10^{-6}$ см. Максимально возможное среднее расстояние между частицами в начальный момент времени составляет величину порядка 10^{-4} см, что много больше r_0 . Поскольку среднее расстояние между частицами только растёт (плазма расширяется), то искажение потенциала не является существенным. Это подтверждено и тестами (см. раздел 2.2.4), которые демонстрируют адекватное воспроизведение общей динамики ультрахолодной плазмы.

Пользуясь (2.1.1.3), запишем выражение для силы $\mathbf{F}_j$, действующей на частицу j со стороны остальных частиц системы:

$$\mathbf{F}_j = -\nabla U_j = \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{q_j \cdot q_k}{(r_{jk} + r_0)^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{jk}}{r_{jk}}. \quad (2.1.1.4)$$

В случае свободного расширения плазмы в вакуум на неё не действуют внешние силы. Поэтому уравнения движения частицы j имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} &= \mathbf{v}_j \\ m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} &= \mathbf{F}_j. \end{aligned} \quad (2.1.1.5)$$

Для получения сведений о системе в целом, необходимо решить уравнения (2.1.1.5) для всех частиц.

2.1.2 Взаимодействие частиц с внешними полями

Точечная заряженная частица, находящаяся в электромагнитном поле, испытывает на себе действие силы Лоренца:

$$\mathbf{F}_l = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (2.1.2.1)$$

где $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, $\mathbf{B}$ – индукция магнитного поля, c – скорость света.

Таким образом, учёт взаимодействия частиц плазмы с внешними полями сводится к добавлению соответствующих членов в уравнения движения. В рамках данной работы моделируется ультрахолодная плазма в том числе и во внешних электромагнитных полях. Учёт силы Лоренца их в уравнениях движения для частицы j даёт:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} &= \mathbf{v}_j \\ m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} &= \mathbf{F}_j + q_j \mathbf{E}(\mathbf{r}_j) + \frac{q_j}{c}[\mathbf{v}_j \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_j)], \end{aligned} \quad (2.1.2.2)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}_j)$ – внешнее электрическое, а $\mathbf{B}(\mathbf{r}_j)$ – внешнее магнитное поле в точке $\mathbf{r}_j$.

В работе моделируется плазма в однородных постоянны скрещенных электрическом и магнитном поле, а также во внешнем постоянном неоднородном квадрупольном магнитном поле. Скажем несколько слов о вычислении последнего.

Для расчёта квадрупольного магнитного поля поступим следующим образом. Рассмотрим вначале поле одного кругового витка радиусом R_c , по которому течет ток I . В силу осевой симметрии такого поля в цилиндрической системе координат, вектор магнитной индукции задается как $\mathbf{B} = B_\rho \hat{\rho} + B_z \hat{z}$. Для компонент существует аналитическое решение [42]:

$$\begin{aligned} B_\rho &= \frac{I}{c} \frac{2z}{r \sqrt{(R_c + \rho)^2 + z^2}} \left(\frac{R_c^2 + \rho^2 + z^2}{(R_c - r)^2 + z^2} E(\alpha) - K(\alpha) \right), \\ B_z &= \frac{I}{c} \frac{2}{\rho \sqrt{(R_c - \rho)^2 + z^2}} \left(\frac{R_c^2 + \rho^2 + z^2}{(R_c - \rho)^2 + z^2} E(\alpha) + K(\alpha) \right), \end{aligned} \quad (2.1.2.3)$$

где

$$\begin{aligned}
K(\alpha) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha \sin^2(\theta)}}, \\
E(\alpha) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \alpha \sin^2(\theta)} d\theta, \\
\alpha &= \frac{4\pi R_c \rho}{(R_c + \rho)^2 + z^2}.
\end{aligned} \tag{2.1.2.4}$$

Можно вычислить эллиптические интегралы (2.1.2.4) с помощью аппроксимирующих полиномов:

$$\begin{aligned}
K(\alpha) &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4}\alpha + \frac{9}{64}\alpha^2 + \frac{25}{256}\alpha^3 + \frac{1225}{16384}\alpha^4 + \frac{3969}{65536}\alpha^5 \right) \\
E(\alpha) &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{64}\alpha^2 - \frac{5}{256}\alpha^3 - \frac{175}{16384}\alpha^4 - \frac{441}{65536}\alpha^5 \right).
\end{aligned} \tag{2.1.2.5}$$

Квадрупольное магнитное поле является суммарным полем двух таких колец, с противоположно направленными токами, находящихся друг от друга на расстоянии $2l$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\rho, z + l) - \mathbf{B}(\rho, z - l). \tag{2.1.2.6}$$

В экспериментах [15; 16] используется параметр, имеющий смысл градиента магнитного поля вдоль оси симметрии колец, который связан с током I :

$$\left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{\rho, z=0} = \frac{12\pi I}{c} \frac{l R_c^2}{(R_c^2 + l^2)^{5/2}}. \tag{2.1.2.7}$$

Таким образом, задание величины градиента квадрупольного магнитного поля, радиусов колец и расстояния между ними позволяет полностью определить это поле.

В завершение отметим, что в случае декартовой системы координат вектор индукции магнитного поля имеет три компоненты (вместо двух для случая цилиндрической системы координат), поэтому выражение (2.1.2.6) необходимо преобразовать соответствующим образом.

2.1.3 Интегрирование уравнений движения

Для численного интегрирования уравнений движения используется метод Верле, представленный в работе [43]. Преимущества этой численной схемы заключаются в её симплексичности и консервативности. Данный метод широко распространён в молекулярно динамическом моделировании вообще [38; 44; 45] и при моделировании плазмы в частности [46–50].

Будем полагать сетку по времени равномерной, с шагом τ . В случае свободного расширения плазмы в вакуум, сеточный аналог системы (2.1.1.5) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j^{(n+1)} &= \mathbf{r}_j^{(n)} + \mathbf{v}_j^{(n)}\tau + \mathbf{a}_j^{(n)}\frac{\tau^2}{2} \\ \mathbf{v}_j^{(n+1)} &= \mathbf{v}_j^{(n)} + \left(\mathbf{a}_j^{(n)} + \mathbf{a}_j^{(n+1)}\right)\frac{\tau}{2} \end{aligned} \quad (2.1.3.1)$$

где (n) – номер итерации, а

$$\mathbf{a}_j^{(n)} = \frac{1}{m_j} \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{q_j q_k}{\left(r_{jk}^{(n)} + r_0\right)^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{jk}^{(n)}}{r_{jk}^{(n)}} \quad (2.1.3.2)$$

ускорение, сообщаемое частице j со стороны других частиц системы.

В случае воздействия внешних электромагнитных полей на плазму, суммарная сила, действующая на частицу j , включает себя и силу Лоренца. Сила Лоренца, в свою очередь, зависит от скорости, поэтому правая часть второго уравнения (2.1.3.1) тоже зависит от $\mathbf{v}_j^{(n+1)}$. Это обстоятельство делает использование численной схемы в исходном виде невозможной.

Для устранения этой трудности поступим следующим образом. Суммарное электрическое поле $\mathbf{E}_j^{(n)}$, действующее на частицу j , создаваемое остальными частицами системы и внешним электрическим полем есть:

$$\mathbf{E}_j^{(n)} = \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{q_k}{(r_{jk} + r_0)^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{jk}}{r_{jk}} + \mathbf{E}_{\text{ext}}^{(n)}(\mathbf{r}_j), \quad (2.1.3.3)$$

где $\mathbf{E}_{\text{ext}}^{(n)}(\mathbf{r}_j)$ – внешнее электрическое поле в точке расположения частицы j .

Тогда для ускорения частицы j справедливо:

$$\mathbf{a}_j^{(n)} = \frac{q_j}{m_j} \left(\mathbf{E}_j^{(n)} + \frac{1}{c} \left[\mathbf{v}_j^{(n)} \times \mathbf{B}_j^{(n)} \right] \right), \quad (2.1.3.4)$$

где $\mathbf{B}_j^{(n)}$ – внешнее магнитное поля в точке расположения частицы j .

Из второго уравнения системы (2.1.3.1) имеем:

$$\mathbf{v}_j^{(n+1)} - \frac{q_j \tau}{2cm_j} \left[\mathbf{v}_j^{(n+1)} \times \mathbf{B}_j^{(n)} \right] = \mathbf{u} = \mathbf{v}_j^{(n)} + \left(\mathbf{a}_j^{(n)} + \frac{q_j}{m_j} \mathbf{E}_j^{(n+1)} \right) \frac{\tau}{2}. \quad (2.1.3.5)$$

Введём обозначение: $b_a = \tau q_j / (2m_j c) \cdot B_a$, где $a = x, y, z$. Рассмотрим векторы $\mathbf{u} = (u_x; u_y; u_z)$ и $\mathbf{v}_j = (v_x; v_y; v_z)$ в декартовой системе координат. Соответствующие компоненты выражения (2.1.3.5) имеют вид:

$$\begin{aligned} u_x &= v_x - b_z v_y + b_y v_z \\ u_y &= b_z v_x + v_y - b_x v_z \\ u_z &= v_z + b_x v_y - b_y v_x. \end{aligned} \quad (2.1.3.6)$$

Выражая v_x из первого уравнения и подставляя в два других, получаем:

$$\begin{aligned} v_x &= u_x + b_z v_y - b_y v_z \\ v_y(1 + b_z^2) - v_z(b_x + b_y b_z) &= u_y - b_z u_x \\ v_y(b_x - b_y b_z) + v_z(1 + b_y^2) &= u_z + b_y u_x. \end{aligned} \quad (2.1.3.7)$$

Из последнего следует:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{u_x(1 + b_x^2) + u_y(b_z + b_x b_y) - u_z(b_y - b_z b_x)}{1 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \\ v_y &= \frac{(b_x b_y - b_z)u_x + u_y(1 + b_y^2) + u_z(b_x + b_y b_z)}{1 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \\ v_z &= \frac{(b_y + b_x b_z)u_x - u_y(b_x - b_y b_z) + u_z(1 + b_z^2)}{1 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}. \end{aligned} \quad (2.1.3.8)$$

Что можно переписать как:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{u_x + b_x(u_x b_x + u_y b_y + u_z b_z) + u_y b_z - u_z b_y}{1 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \\ v_y &= \frac{u_y + b_y(u_x b_x + u_y b_y + u_z b_z) + b_x u_z - u_x b_z}{1 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \\ v_z &= \frac{u_z + b_z(u_x b_x + u_y b_y + u_z b_z) + u_x b_y - b_z u_y}{1 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}. \end{aligned} \quad (2.1.3.9)$$

Окончательно, в векторном виде, для связи $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ имеем:

$$\mathbf{v}_j = \frac{\mathbf{u} + [\mathbf{u} \times \mathbf{b}] + \mathbf{b}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})}{1 + b^2}. \quad (2.1.3.10)$$

С учетом полученного выше результата, численная схема (2.1.3.1) теперь примет вид [3]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j^{(n+1)} &= \mathbf{r}_j^{(n)} + \mathbf{v}_j^{(n)} \tau + \mathbf{a}_j^{(n)} \frac{\tau^2}{2} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{v}_j^n + \frac{q_j \tau}{2cm_j} \left(\mathbf{E}_j^{(n)} + \mathbf{E}_j^{(n+1)} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_j^{(n)} \times \mathbf{B}_j^{(n)}] \right) \\ \mathbf{v}_j^{(n+1)} &= \frac{\mathbf{u} + [\mathbf{u} \times \mathbf{b}] + \mathbf{b}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})}{1 + b^2}, \end{aligned} \quad (2.1.3.11)$$

где введено обозначение $\mathbf{b} = \frac{\tau q_j}{2m_j c} \cdot \mathbf{B}_j^{(n)}$.

Суммарное электрическое поле $\mathbf{E}_j^{(n+1)}$, действующее на частицу как со стороны остальных частиц, так и со стороны внешнего поля (при его наличии), вычисляется после решения первого уравнения системы (2.1.3.11), так как обновлённые координаты частиц уже известны.

Численная схема в виде (2.1.3.11) получена в рамках работы [3], поскольку найти её в литературе, в представленном виде, не удалось. Она используется для интегрирования уравнений движения при наличии внешних электромагнитных полей.

2.1.4 Генерация случайно распределённых величин

Для задания начальных условий необходимо получать случайные величины требуемого вида. Поэтому вначале обсудим вопросы, связанные с генерацией случайных величин.

Рассмотрим вначале получение произвольной случайной величины, для которой функция плотности вероятности известна. Пусть $R(x)$ равномерно распределённая величина на единичном отрезке $[0, 1]$. Для нахождения случайно распределённой величины с плотностью вероятности $f(x)$ на интервале $[a, b]$

необходимо разрешить уравнение [51]:

$$\int_a^{\xi} f(x)dx = R(x) \quad (2.1.4.1)$$

относительно ξ , где $\xi \in [a, b]$.

Уравнение (2.1.4.1) можно решить численно, например методом деления отрезка пополам.

Отдельного внимания заслуживает способ получения нормально распределенной случайной величины. В настоящей работе используется преобразование Бокса-Мюллера [52], которое позволяет получить стандартное нормальное распределение. Преобразование состоит в следующем. Пусть числа a и b равномерно распределены на отрезке $[-1, 1]$. Если условие $0 < a^2 + b^2 \leq 1$ неверно, то числа отбрасываются и генерируется новая пара. В противном случае вычисляется:

$$\begin{aligned} x_a &= a \cdot \sqrt{-\frac{2 \cdot \ln(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}} \\ x_b &= b \cdot \sqrt{-\frac{2 \cdot \ln(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}}, \end{aligned} \quad (2.1.4.2)$$

которые и соответствуют искомому распределению.

Для перехода к распределению с математическим ожиданием μ и среднеквадратическим отклонением σ , необходимо совершить преобразование вида $f(x)|_{\mu, \sigma} = \mu + \sigma x$.

2.1.5 Начальные и граничные условия

Обсудим вначале вопрос задания начальных координат, для которых имеют место две функции распределения (см. раздел 1.1.5).

Одно из распределений является сферически-симметричным, нормальным и определено выражением (1.1.5.1). Поэтому, для задания декартовых координат частиц, достаточно сгенерировать три множества $\{x\}$, $\{y\}$ и $\{z\}$ нормально распределенных чисел в соответствии с преобразованием Бокса-Мюллера (см. 2.1.4). Математическое ожидание этих распределений одинаково, причём $\mu = 0$,

поскольку частицы создаются в центре магнито-оптической ловушки. Средне-квадратическое отклонение распределений, которое носит смысл характерного размера плазмы, одинаково и зависит от числа частиц одного типа N и начальной пиковой концентрации n_0 :

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt[3]{\frac{N}{n_0}}. \quad (2.1.5.1)$$

Другое распределение является экспоненциальным, обладает цилиндрической симметрией и дано выражением (1.1.5.2). Для того, что бы получить его, поступим следующим образом. Из условия нормировки $\int n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = N$, получаем, что:

$$\sigma_0 = \sqrt[3]{\frac{N}{8\pi n_0 \eta}}, \quad (2.1.5.2)$$

где $\eta = 4$ – свободный параметр.

Далее генерируем три равномерно распределенных величины:

$$\begin{aligned} \varphi, \quad 0 < \varphi < 2\pi \\ b = \cos(\theta), \quad -1 < b < 1 \\ f(r) = \frac{1}{2\sigma^3} r^2 \exp\left(-\frac{r}{\sigma_0}\right). \end{aligned} \quad (2.1.5.3)$$

Затем, для случайного числа $a \in [0, 1]$ находим r численно решая уравнение (2.1.4.1).

Наконец, переходим к декартовым координатам:

$$\begin{aligned} \{x\} &= r \sqrt{\eta(1-b^2)} \cdot \cos(\varphi) \\ \{y\} &= r \sqrt{\eta(1-b^2)} \cdot \sin(\varphi) \\ \{z\} &= rb. \end{aligned} \quad (2.1.5.4)$$

В результате полученное распределение соответствует (1.1.5.2). Всюду в рамках данной работы для распределения (1.1.5.2) параметр $\eta = 4$.

Перейдем теперь к заданию начальных скоростей. Поскольку начальное распределение скоростей ионов соответствует распределению скоростей атомов исходного газа, то его можно считать максвелловским. Функция распределения

проекций скоростей имеет вид:

$$\varphi(v_a) = \sqrt{\frac{m_i}{2\pi k_b T_{i0}}} \cdot \exp\left(-\frac{m_i v_a^2}{2k_b T_{i0}}\right), \quad (2.1.5.5)$$

где $a = x, y, z$ и T_{i0} – начальная температура ионов.

Поскольку это выражение представляет собой нормальное распределение с $\mu = 0$ и $\sigma = \sqrt{k_b T_{i0}/m_i}$, то для получения начального распределения скоростей ионов достаточно сгенерировать три множества их проекций $\{v_x\}$, $\{v_y\}$ и $\{v_z\}$ с помощью преобразования Бокса-Мюллера, которое рассмотрено выше.

Начальная температура электронов T_{e0} определяется превышением энергии над порогом ионизации. Уместно допустить, что их начальные скорости равны по величине и равновероятно распределены по направлениям. Таким образом, для генерации начальных скоростей электронов достаточно сгенерировать три множества: радиусы-векторы равной величины $\{v_{e0}\} = \sqrt{3k_b T_{e0}/m_e}$, зенитный $\{\theta\}$ и азимутальный $\{\varphi\}$ углы. Эти величины равномерно распределены на отрезках $[0, 2\pi]$ и $[-\pi/2, \pi/2]$ соответственно. После этого стоит преобразовать координаты к декартовым.

Задачи, рассматриваемые в рамках данной работы, не имеют границы, поэтому какие-либо граничные условия отсутствуют.

2.2 Особенности программной реализации

Отметим, что в рамках данной работы отсутствуют какие-либо ограничения по дальнодействию между частицами. Кроме того, не используются различные приближенные методы вычисления, такие как ppm (particle-particle particle-mesh) [53] и fast multipole expansion [54]. Эти обстоятельства приводят к тому, что вычислительная сложность зависит от числа частиц как $O(N^2)$.

В настоящем разделе обсуждаются некоторые особенности программной реализации и вопросы ускорения вычислений путём их распараллеливания.

2.2.1 Общая структура программы и используемые средства

В рамках данной работы, для проведения моделирования разработан комплекс из трёх программ.

Первая из них генерирует начальные начальные условия и является последовательной. Поскольку генерация начальных условий происходит лишь единожды, а сами условия обладают относительной простотой, то разработка параллельного приложения видится нецелесообразной. В качестве входных данных программа принимает текстовый файл, в котором содержатся параметры моделирования. Результатом её работы является бинарный файл. В начале этого файла записан общий заголовок, содержащий все параметры моделирования, он имеет фиксированную длину. После заголовка расположены данные о частицах, соответствующие нулевому моменту времени (начальные условия), вместе со своим локальным заголовком (фиксированного размера), в котором имеются такие данные как число частиц каждого типа, размер блока и тд.

Вторая программа является параллельной и интегрирует уравнения движения. В качестве входного файла она принимает упомянутый выше бинарный файл и добавляет результаты своей работы в его конец с заданной периодичностью, добавляя новый блок данных к уже имеющимся. Запись ведется таким образом, что расчёт, прерванный до его завершения, может быть продолжен с момента прерывания. По окончании работы имеются зависимости координат и скоростей всех частиц от времени.

Третья программа предназначена для различных задач обработки результатов. Под такой обработкой подразумевается вычисление значений различных физических величин, различных распределений и тп.

Все программы лишены графического интерфейса и управляются из консоли. Нужные параметры запуска задаются при с помощью аргументов командной строки. Возможность разбора аргументов удобна тем, что все требуемые действия могут быть объединены в единый сценарий с помощью интерпретато-

ра команд, например такого, как `bash`.

Для написания программ используется язык C. Библиотеки Message Passing Interface и OpenMP выступают в роли интерфейсов параллельного программирования. Части программы, исполняемые на графическом процессоре, написаны на CUDA C.

2.2.2 Понижение вычислительной сложности

Вычислительную сложность задачи можно понизить воспользовавшись особенностями физики моделируемой системы. Обсудим одну из них.

Массы частиц обоих типов существенно различаются $m_i \gg m_e$. Кроме этого, существенно различаются и их начальные температуры, $T_{e0} \gg T_{i0}$. Таким образом, ионы представляют собой сравнительно медленные и тяжелые частицы. Имея это в виду, расчёт взаимодействия между частицами можно производить на различных сетках по времени, что является известным приёмом [55–59]. В результате вычисляется меньше парных взаимодействий, что приводит к ускорению. Отношение шагов этих сеток можно выбирать следующим: $\tau_i/\tau_e \propto \sqrt{m_i/m_e}$. Однако необходимо иметь в виду, что свойства численной схемы могут изменяться. Так, численная схема, используемая в данной работе теряет свою консервативность. Это обсуждается, например, в работе [60]. В связи с этим, подгоночная константа пропорциональности отношения шагов по времени выбирается так, чтобы распределение электронов не изменилось слишком сильно в течение τ_i и дрейф энергии был небольшим. Такой подход может быть допустим только при изучении общей динамики. Для изучения вопросов, требующих точности, необходимо использовать одну сетку по времени.

Дальнейшее ускорение вычислений достигается путём распределения работы между имеющимися ресурсами для тех её участков, где это возможно. При этом необходимо отталкиваться как от особенностей самой задачи, так и от архитектурных особенностей электронно-вычислительной машины.

Поскольку постоянно вычисляются все парные взаимодействия, вычисли-

тельная нагрузка распределяется путём декомпозиция данных, что схематично изображено на Рис. 2.2.2.1. При этом начальные данные равномерно распре-

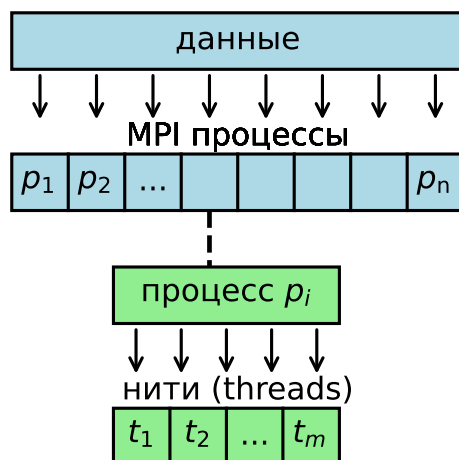


Рис. 2.2.2.1: Схематичное представление декомпозиции данных.

деляются между mpi-процессами (далее просто процессы), число которых равно M_p . Процессы выполняются на заданном числе микропроцессорных ядер. Каждый процесс имеет собственное, независимое адресное пространство, а их выполнение считается истинно параллельным (хотя это и не обязательно так, если M_p превышает число микропроцессорных ядер). В данном случае каждый из процессов выполняет один и тот же набор инструкций и вычислительная нагрузка распределена равномерно между ними. Внутри процесса, уже в рамках общей памяти, работа может распределяться по нитям (threads) с помощью OpenMP, если число нитей больше одной. В результате, каждый процесс имеет свою часть данных.

Для расчёта необходимо вычислить взаимодействие как между локальными (принадлежащими данному процессу) частицами, так и взаимодействие локальных частиц с удалёнными (принадлежащими другим процессам). Это достигается с помощью обмена данными между процессами, устроенного следующим образом.

Пусть все процессы пронумерованы по порядку. Назовём предыдущим процессом такой, номер которого меньше номера данного процесса на единицу. Следующим процессом назовём такой, номер которого больше номера данно-

го процесса на единицу. Для нулевого предыдущим является процесс M_p . Для процесса с номером M_p следующим является нулевой процесс.

Каждый процесс получает данные об удаленных частицах от предыдущего, вычисляет взаимодействие между локальными и удаленными частицами, а затем отправляет их следующему процессу [61]. Последовательность необходимых для этого действий представлена на Алг. 1:

Algorithm 1: Local-remote interaction computation.

Input: Local particle set $lCoords$, buffers $sendBuf$, $recvBuf$

```

1  $sendBuf \leftarrow localParticles$ 
2 for  $k \leftarrow 1$  to  $M_p - 1$  do
3   Exchange  $sendBuf$  with neighboring process
4   Compute interactions between local particles and  $recvBuf$ 
5   Swap  $sendBuf$  and  $recvBuf$ 
6 end
```

На строке 3 Алг. 1 происходит обмен данными между процессами например с помощью функции `MPI_Isendrecv()`, определённой в `<mpi.h>`. При этом блок данных, полученных от предыдущего процесса, отправляется следующему процессу и принимается новый блок данных от предыдущего процесса. Заметим, что на первой итерации процесс отправляет собственные данные следующему процессу.

Строка 2 Алг. 1 состоит в вызове функции вычисления взаимодействия между локальным и удаленным блоками частиц.

Таким образом, по завершении цикла все блоки данных проходят между процессами по кругу и происходит вычисление взаимодействий между всеми частицами.

Рассмотрим теперь алгоритм действий для численной схемы (2.1.3.11), учитывающий внешние электромагнитные поля, поскольку он является более общим. Отметим, что он легко может быть сведён к случаю расширения плазмы в вакуум и схеме (2.1.3.1), путём применения условных операторов. Основную

вычислительную работу составляет цикл по времени, выполняемый каждым процессом. Последовательность основных действий этого цикла представлена в Алг. 2:

Algorithm 2: The main loop

```

1  while  $t < steps$  do
2      update coordinates
3      compute local-local interactions
4      compute local-remote interactions
5      if  $flagField = true$  then
6          calculate fields
7          calculate field-particle interactions
8      end
9      update velocities
10     if  $flagWrite = true$  then
11         write results
12     end
13     handle term signal
14      $t \leftarrow t + 1$ 
15 end

```

Приведем некоторые комментарии. Строка 2 Алг. 2 состоит в вычислении координат частиц $\mathbf{r}^{(n+1)}$.

Строка 3 Алг. 2 состоит в вычислении взаимодействий между локальными частицами процесса.

На строке 4 Алг. 2 происходит вычисление взаимодействий между локальными и удаленными частицами, как это представлено в Алг. 1

Строки 5–8 Алг. 2 заключаются в вычислении, если это требуется, внешних $\mathbf{E}^{(n+1)}$ и $\mathbf{B}^{(n+1)}$ полей и ускорений, обусловленных этими полями.

На строке 9 Алг. 2 вычисляются скорости частиц $\mathbf{v}^{(n+1)}$.

Запись результатов, с требуемой периодичностью, происходит на строках 10–12 Алг. 2.

Как уже было отмечено, запись ведётся в единый бинарный файл. Необходимые данные о частицах записываются в конец файла таким образом, что данный расчёт может быть продолжен после его прерывания. При наличии па-

параллельной файловой системы, средствами Message Passing Interface, возможна параллельная запись в один общий файл. Это достигается путём создания соответствующего файлового представления, что описано в стандарте [62].

Наконец, строка 13 Алг. 2 заключается в обработке сигнала завершения. В нашем случае это SIGUSR1, определенный в `<signals.h>`. Для его обработки, вызывается функция `signal(SIGUSR1, signal_handler)`, которая определена в `<signals.h>`. Отметим, что это необходимо сделать до входа цикл, представленный в Алг. 2. По получении сигнала происходит запись текущего состояния и завершение программы.

Предложенный подход легко адаптируется под вычисления на графических процессорах. При этом центральный микропроцессор выполняет роль управляющего устройства. Все вычисления выполняются на графическом процессоре.

При вычислениях на нескольких графических процессорах, обмен данными между ними осуществляется по кольцевой схеме, представленной в Алг. 1. Выполнение копирования одновременно с вычислениями позволяет скрыть часть задержек обмена, поскольку графический процессор имеет различные физические устройства для вычислений и работы с памятью [63]. Для этого на графическом процессоре запускается два различных потока выполнения (`stream`), которые синхронизируются в нужных точках. Один поток занят вычислениями, а другой работой с памятью. Если число частиц достаточно велико, существенная часть времени затрачиваемого на обмен будет скрыта и задержки, связанные с обменом, практически не повлияют на общее время работы программы.

2.2.3 Ускорение вычислений

Обсудим теперь достигнутое ускорение вычислений s . Определим его следующим образом:

$$s = \frac{t_s}{t_p}, \quad (2.2.3.1)$$

где t_s – время работы последовательной программы, а t_p – время работы параллельной программы.

Замеры производительности программы выполняемой только на микропроцессорах проведены на двух электронно-вычислительных машинах различной конфигурации. На первой (далее конфигурация А) задействовано 4 вычислительных узла с 2 процессорами Intel Xeon E5-2697 на каждом. На второй (далее конфигурация Б) задействован 1 процессор AMD EPYC 7742. В обоих случаях суммарное число частиц $N = 10^4$.

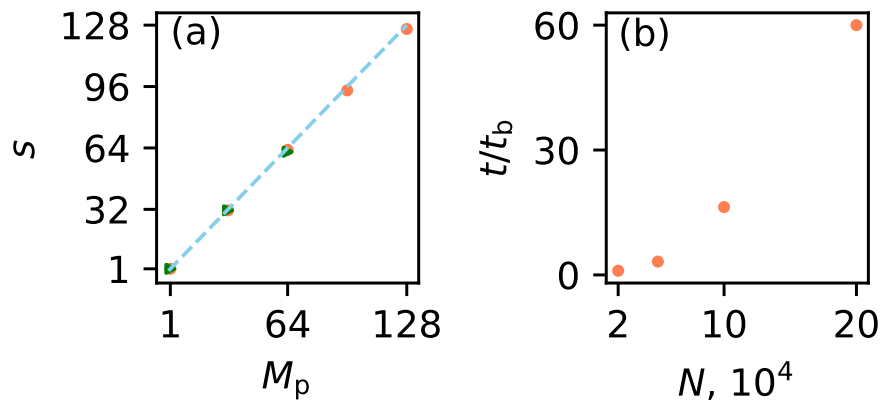


Рис. 2.2.3.1: Зависимости: (а) $s(M_p)$ для конфигурации А (кружки) и конфигурация Б (треугольники) в сравнении с идеальным случаем (пунктир); (б) относительного времени от общего числа частиц при вычислениях на графическом процессоре.

Результаты замеров ускорения приведены на Рис. 2.2.3.1(а), где изображена зависимость $s(M_p)$. Сплошная линия соответствует прямой пропорциональности (идеальный случай). Символами обозначены конфигурации А и Б. Поскольку размер данных относительно мал, то наблюдается лишь небольшое отклонение от идеального случая.

Версия для графических ускорителей тестировалась на NVIDIA TESLA V100 (16Gb, PCI). Суммарное число частиц изменялось в диапазоне от $2 \cdot 10^4$ до $2 \cdot 10^5$.

Выражение (2.2.3.1) для графического процессора неприменимо, поскольку он предназначен для выполнения большого количества нитей одновременно. В

связи с этим измерялось отношение t/t_b , где в качестве опорного времени t_b взято время работы при числе частиц $2 \cdot 10^4$.

На рис. 2.2.3.1(b) изображено относительное время t/t_b в зависимости от общего числа частиц N . Видно, что время расчёта по прежнему зависит от размера данных квадратично, как и должно быть.

Постоянное вычисление всех парных взаимодействий и, как следствие, декомпозиция данных в данном случае имеет ограниченный потенциал по ускорению вычислений. Это обусловлено тем, что с увеличением размера данных, даже при условии скрытых задержек обмена, сложность растёт квадратично. Однако несомненным преимуществом подхода является отсутствие необходимости какой-либо обработки пересылаемых данных, а значит простота разработки и отладки.

2.2.4 Тестирование

В завершение раздела приведём результаты ряда тестов, которые показывают, что основные физические явления воспроизводятся достоверно.

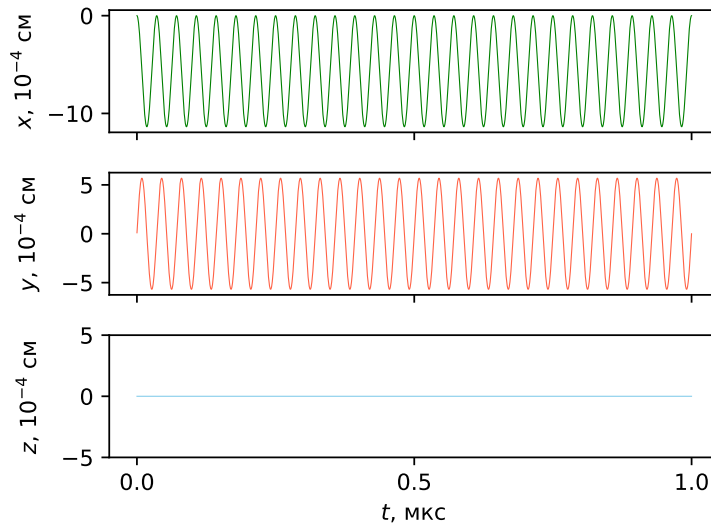


Рис. 2.2.4.1: Зависимости координат x (верх), y (центр), z (низ) от времени для электрона в магнитном поле $B = 10$ Гс, $v_{\perp} = 10^5$ см/с.

Рассмотрим вначале тесты для одной частицы. Начнём с движения электрона в магнитном поле с $B = 10$ Гс, направленном вдоль оси z , находящемся

в начале координат, с начальной скоростью $v_{\perp} = 10^5$ см/с, направленной вдоль оси y . На Рис. 2.2.4.1 приведены результаты интегрирования уравнений движения с помощью схемы (2.1.3.11), которая, как видно, даёт замкнутые траектории в течение 28 периодов при неизменном положении по оси z . Число периодов за 1 мкс согласуется с расчётным. Пользуясь известным выражением для циклотронного радиуса $r_c = m_e c v / (e B)$, для этих условий получаем $r_c \approx 5.686 \cdot 10^{-4}$ см, эта же величина, полученная из данных моделирования, составляет $r_c = 5.684 \cdot 10^{-4}$ см.

Пусть электрон с координатами $\mathbf{r} = (0.1 \text{ см}; 0.1 \text{ см}; 0.1 \text{ см})$ и начальной скоростью $\mathbf{v} = (10^5 \text{ см/с}; 10^5 \text{ см/с}; 10^5 \text{ см/с})$, движется в квадрупольном магнитном поле, с величиной градиента вдоль оси Z $B' = 30$ Гс/см. Траектория, получае-

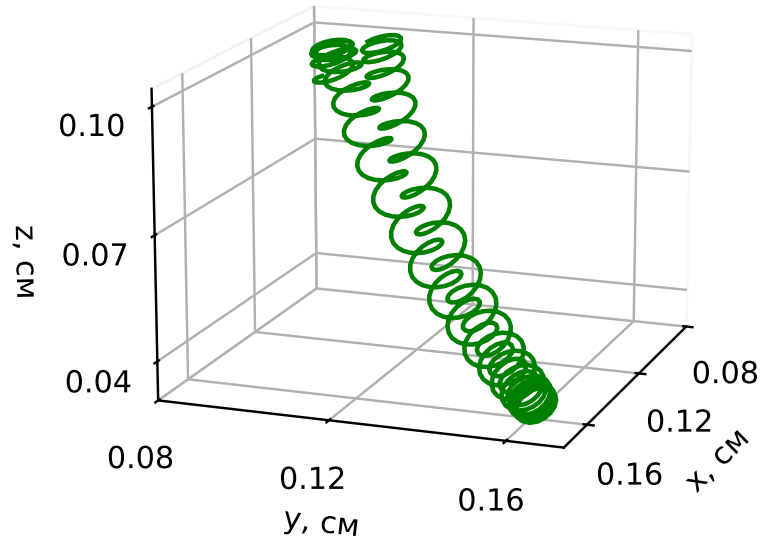


Рис. 2.2.4.2: Траектория частицы в квадрупольном магнитном поле.

мая при интегрировании уравнений движения с помощью (2.1.3.11) изображена на Рис. 2.2.4.2. Она согласуется с результатами [64], кроме того, наблюдается ожидаемый эффект магнитного зеркала [65].

Очередной тест демонстрирует движение электрона в скрещенных постоянных однородных электрическом и магнитном полях. Электрон с координатами

$\mathbf{r} = (4.02993 \cdot 10^{-3} \text{ см}, -7.48054 \cdot 10^{-3} \text{ см}, -1.35273 \cdot 10^{-2} \text{ см})$ и начальной скоростью $\mathbf{v} = (-5.13946 \cdot 10^5 \text{ см/с}, -2.80805 \cdot 10^6 \text{ см/с}, -2.77179 \cdot 10^5 \text{ см/с})$ находится в однородном электрическом поле $E = 10^{-5} \text{ статВ/см}$ приложенном вдоль оси X, и однородном магнитном поле $B = 30 \text{ Гс}$ приложенном вдоль оси Z. Известно [66], что при таких условиях частица должна двигаться в направлении дрейфа $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$, со средней скоростью $V_d = -cE/B$, и равномерно вдоль линий магнитного поля. На Рис. 2.2.4.3 изображены зависимости его координат от

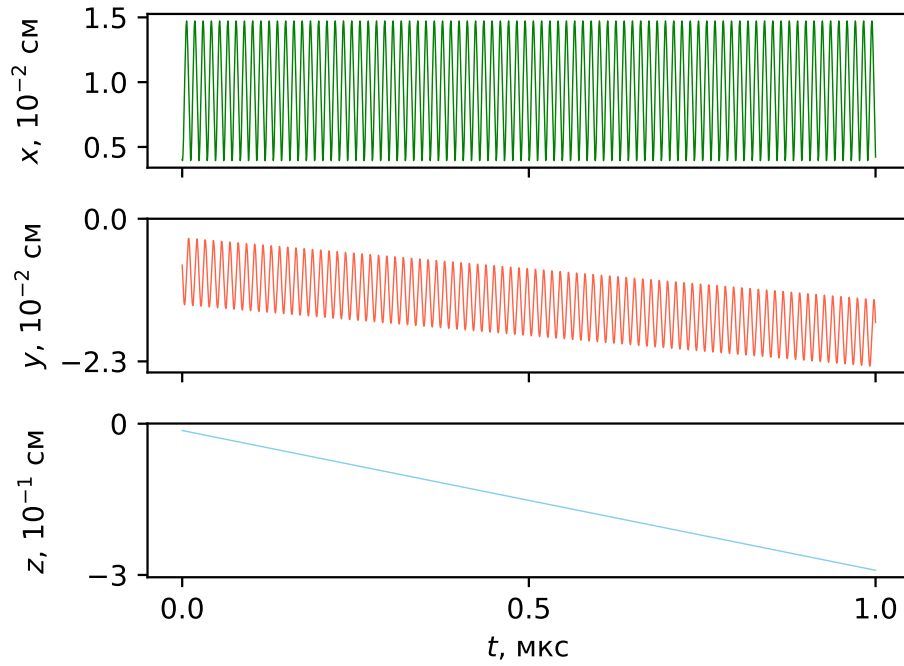


Рис. 2.2.4.3: Зависимости координат x (верх), y (центр), z (низ) от времени для электрона в скрещенных постоянных однородных электрическом $E = 10^{-5} \text{ статВ/см}$ и магнитном $B = 30 \text{ Гс}$ полях.

времени. Как видно из верхней и средней частей рисунка, частица колеблется вдоль направлений X и Y. При этом наблюдается дрейф вдоль Y, что соответствует ожидаемому. Из нижней части рисунка видно, что частица совершает равномерное движение. В таблице 1 приведено сравнение теоретических характеристик такого движения с результатами моделирования.

От тестов с одной частицей, перейдем к многочастичным тестам. В качестве первого теста рассмотрим нарушение электронейтральности в ультрахолодной плазме ^{88}Sr при $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$ и $T_{e0} = 100 \text{ К}$. Пользуясь выра-

Таблица 1: Сравнение теоретических характеристик с моделированием при тесте в скрещенных постоянных однородных электрическом и магнитном полях

Величина	Теория	Моделирование	Отклонение [%]
V_d [см/с]	-9.99×10^3	-9.76×10^3	2.37
r_c [см]	$+5.41 \times 10^{-3}$	$+5.39 \times 10^{-3}$	0.34
ω_c [рад/с]	$+5.28 \times 10^8$	$+5.28 \times 10^8$	0.0

жением (1.3.1.2), можно определить долю электронов, покинувших плазму как $\Delta N = \sqrt{N^*/N_i}$, где N^* вычисляется с помощью (1.3.1.1). Для приведенных условий $\Delta N \approx 0.29$. Результат моделирования приведен на Рис. 2.2.4.4, что,

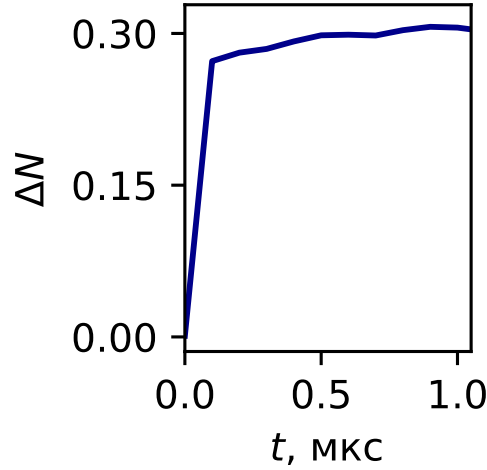


Рис. 2.2.4.4: Зависимость $\Delta N(t)$ для ^{88}Sr при $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$ и $T_{e0} = 100 \text{ К}$.

как видно, согласуется с полученным значением.

В очередном тесте рассмотрим динамику ионов ультрахолодной плазмы ^{40}Ca , при $N = 2.5 \cdot 10^4$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, для двух различных начальных температур электронов: $T_{e0} = 10 \text{ К}$ и $T_{e0} = 100 \text{ К}$. Одной из основных характеристик, измеряемых в эксперименте, является среднеквадратичное отклонение координат ионов. Первое уравнение (1.5.1.8) позволяет получить зависимость этой величины от времени, которая, в свою очередь, хорошо согласуется с результатами эксперимента [7]. На Рис. 2.2.4.5 приведены зависимости, получаемые при моделировании, в сравнении с аналитическим выражением. Видно хорошее

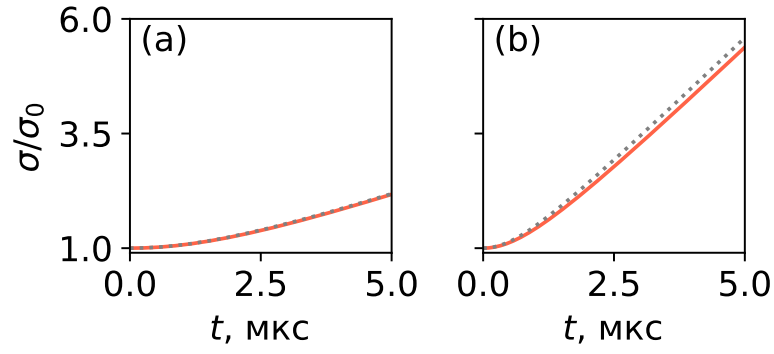


Рис. 2.2.4.5: Зависимости $\sigma(t)$ (сплошная) в сравнении с выражением (1.3.5.1) (пунктир) нормированные на свои начальные значения для: (a) ^{40}Ca , $T_{e0} = 10\text{ K}$, $N = 2.5 \cdot 10^4$; (b) ^{40}Ca , $T_{e0} = 100\text{ K}$, $N = 2.5 \cdot 10^4$. Везде $n_0 = 10^9\text{ см}^{-3}$.

согласие.

Наконец, продемонстрируем консервативность численной схемы (2.1.3.11). На Рис. 2.2.4.6 приведена полная механическая энергия системы $T^* + U^*$ нормированная на свое начальное значение, от времени, в магнитном поле для ^{40}Ca , $T_{e0} = 100\text{ K}$, $N = 2.5 \cdot 10^4$, $B = 100\text{ Гс}$, $n_0 = 10^9\text{ см}^{-3}$. Наблюдается лишь

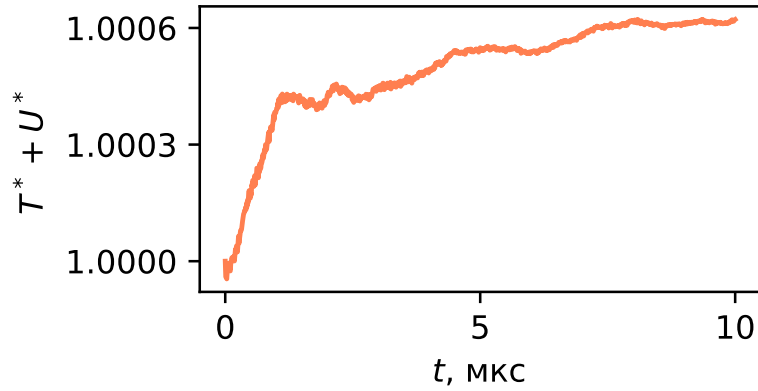


Рис. 2.2.4.6: Зависимость $T^* + U^*$ от времени для ^{40}Ca , $T_{e0} = 100\text{ K}$, $N = 2.5 \cdot 10^4$, $B = 100\text{ Гс}$, $n_0 = 10^9\text{ см}^{-3}$.

небольшой дрейф, в четвёртом знаке после запятой.

2.3 Заключение к разделу

В разделе приведены основные допущения, используемые при моделировании, а также используемые численные методы интегрирования уравнений дви-

жения. Кроме того, описаны используемые способы генерации начальных условий и вычисления компонент квадрупольного магнитного поля.

Приведены основные особенности разработанной программы и способ распараллеливания. Продемонстрировано получаемое ускорение.

Результаты тестов, два из которых имеют непосредственное сравнение с экспериментом, говорят о том, что разработанная программа адекватно воспроизводит основные физические явления.

Глава 3. Ультрахолодная плазма в вакууме

Явление ускорения ионов при расширении плазмы в вакуум было экспериментально обнаружено при изучении дуговых разрядов [67]. Теоретическое объяснение, основанное на механизме амбиполярной диффузии, позднее представлено в работах [68; 69].

Ультрахолодная плазма, в силу своих параметров, обладает рядом особенностей, а к описанию процесса расширения применяются различные подходы.

Модели, предполагающие электронейтральность, дают достаточно точное описание общей динамики ультрахолодной плазмы во времени и подчёркивают ряд особенностей. Как видно из первого выражения выражения (1.5.1.8), ультрахолодная плазма разлетается баллистически.

Отличительной особенностью моделей, учитывающих нарушение электронейтральности ультрахолодной плазмы при её расширении, является возникновение резкого пика в распределении концентрации ионов, который говорит о возможном формировании ионного фронта.

В данной главе обсуждаются результаты молекулярно-динамического моделирования процесса расширения ультрахолодной плазмы в вакуум. Главное внимание уделено явлениям, вызванным нарушением электронейтральности.

3.1 Начальные и граничные условия

Параметры моделирования выбираются с оглядкой на эксперименты [6; 15] и обзорные работы [7; 8].

Моделируется двухкомпонентная ультрахолодная плазма. Масса иона m_i равняется массе $^{88}\text{Sr}^+$. Масса электрона m_e тоже соответствует своему реальному значению. Число частиц одного типа $N = N_i = N_e$ варьируется в диапазоне от 10^3 до 10^5 .

В начальный момент времени координаты частиц распределены либо нор-

мально (1.1.5.1), либо экспоненциально (1.1.5.2). Пиковое значение концентрации $n_0 = n_{i0} = n_{e0}$ лежит в диапазоне от 10^9 см^{-3} до 10^{10} см^{-3} .

Начальная температура ионов составляет $T_{i0} = 10^{-3} \text{ К}$, а начальная температура электронов T_{e0} лежит в диапазоне от 20 К до 100 К.

Начальные условия сгенерированы способами, описанными в разделе 2.

Граничные условия отсутствуют.

Интегрирование уравнений движения производится с помощью численной схемы (2.1.3.1).

3.1.1 Используемые характерные величины

Для описания процессов, происходящих в плазме, удобно пользоваться характерными величинами.

Характерный размер плазмы σ_0 зависит от вида начального распределения координат и определяется выражениями (2.1.5.1) и (2.1.5.2), для нормального (1.1.5.1) и экспоненциального (1.1.5.2) распределений соответственно.

Безразмерное расстояние определено как $\hat{r} = r/\sigma(t)|_{t=t_c}$, где $\sigma(t)$ равна своему значению в рассматриваемый момент времени t_c .

В качестве масштаба времени положим величину τ_{exp} , определённую выражением (1.5.1.9).

Характерным масштабом скорости выберем скорость ионного звука [70]:

$$c_s = \sqrt{\frac{k_b T_{e0}}{m_i} + \frac{k_b T_{i0}}{m_i}} \approx \sqrt{\frac{k_b T_{e0}}{m_i}}, \quad (3.1.1.1)$$

здесь пренебрежение членом, содержащим T_{i0} , обусловлено его малостью (см. раздел 1.1.5).

Если не указано иного, то начальное распределение концентрации плазмы соответствует нормальному. Когда речь идет об экспоненциальном распределении, то это указывается явно.

Условимся считать, что граница плазмы определяется положением наиболее удаленных от центра ионов. Электроны, находящиеся далее этого расстояния,

считаются покинувшими плазму (хотя и постоянно учитываются при моделировании).

3.2 Динамика электронов

Рассмотрим вначале динамику электронов, поскольку в связи с их относительно малой массой и большой начальной кинетической энергией, характерное время их релаксации значительно меньше ионного.

3.2.1 Дисбаланс зарядов и электрическая потенциальная яма

Процесс расширения плазмы начинается с того, что часть электронов, кинетическая энергия которых достаточно велика, покидает плазму. Этот процесс называется испарением электронов. Моделирование показывает, что оно происходит, в основном, из тонкого приграничного слоя, что совпадает с результатом, приведённым в [71].

Доля электронов, покинувших плазму электронов, также называемая дисбалансом зарядов, зависит от её параметров. Она определена следующим образом:

$$\Delta N = \frac{N_i - N_e(t)}{N_i} = \frac{N - N_e(t)}{N}, \quad (3.2.1.1)$$

где $N_i = N = \text{const}$ (поскольку граница плазмы определяется самым удалённым ионом, и, следовательно, их число в плазме постоянно), а $N_e(t)$ это число электронов внутри плазмы.

Время, за которое происходит испарение электронов можно оценить следующим образом:

$$t_{\text{evap}} \propto \sigma_0 / v_{T_e} = \sigma_0 \sqrt{\frac{m_e}{k_b T_{e0}}}. \quad (3.2.1.2)$$

Величина t_{evap} и лежит в диапазоне от 10^{-8} с до 10^{-7} с.

На Рис. 3.2.1.1(а) изображена зависимость дисбаланса зарядов $\Delta N(t)$ для различных режимов. Видно, что число покинувших плазму электронов выходит на некоторую, соответствующую данному набору параметров, константу.

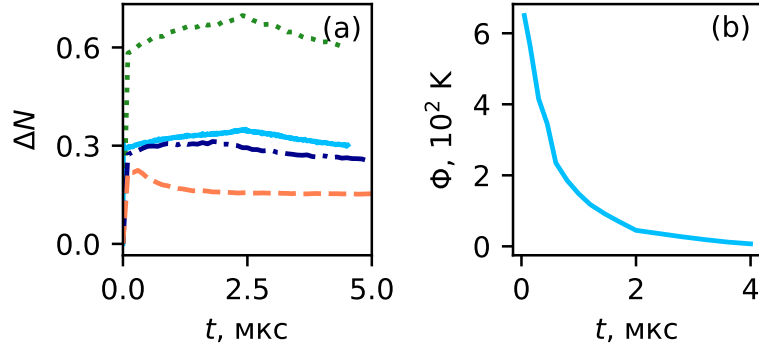


Рис. 3.2.1.1: Зависимости от времени (a) ΔN для ^{88}Sr и: $N = 10^4$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$ (сплошная), $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 50 \text{ K}$ (пунктир); $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$ (штрих-пунктир); $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$ (штрих); (b) глубины потенциальной ямы Φ от времени для $N = 10^4$, $n_0 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$.

Получаемые результаты, касаемо доли покинувших плазму электронов, согласуются с результатами выражений (1.3.1.1) и (1.3.1.2). Например, для значений штрих-пунктирной линии, изображённой на Рис. 3.2.1.1(a), эти выражения дают $\Delta N \approx 0.29$, что близко к наблюдаемому.

На основе результатов моделирования при $T_{e0} = 100 \text{ K}$ и числе электронов $N_e \geq 5 \cdot 10^3$, отношение числа электронов, покинувших плазму к общему числу электронов можно аппроксимировать следующим образом [1]:

$$\frac{\Delta N}{N_e} \approx 6.7 \cdot \Delta N^{-1/3}. \quad (3.2.1.3)$$

Последнее выражение может быть экстраполировано на экспериментальные значения. Так, при $N_e = 5 \cdot 10^7$ получаем $\Delta N/N_e = 1.5 \cdot 10^{-2}$, что близко к значениям, представленным в [6].

Нарушение электронейтральности плазмы приводит к формированию электрической потенциальной ямы, в которой запираются оставшиеся электроны. Её глубина определяется выражением:

$$U = e \int_0^\infty E(r, t) dr, \quad (3.2.1.4)$$

где $E(r, t)$ – электрическое поле плазмы.

На Рис. 3.2.1.1(b) изображена зависимость глубины потенциальной ямы Φ , выраженной в единицах температуры, в зависимости от времени. Убывание $\Phi(t)$ обусловлено расширением плазмы.

3.2.2 Распределение электронов

В случае нормального начального распределения координат (1.1.5.1), вид функции распределения электронов плазмы сохраняется с течением времени. На Рис. 3.2.2.1 изображены функции распределения электронов плазмы (зе-

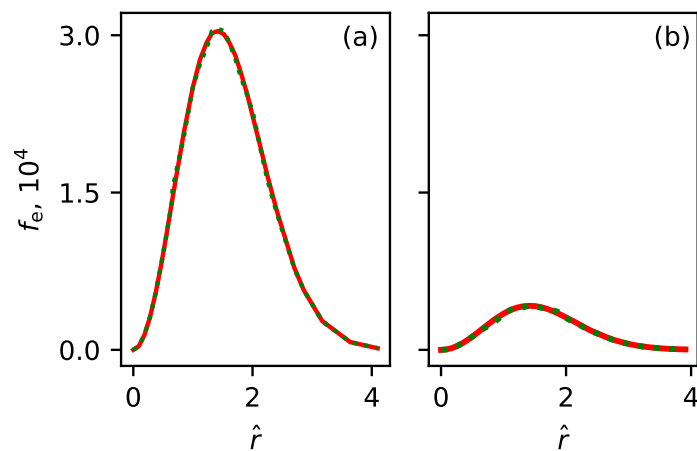


Рис. 3.2.2.1: Функция распределения электронов (штрих) в сравнении с исходной (сплошная) в различные моменты времени: (a) $t = 1$ мкс; (b) $t = 10$ мкс. Здесь $N = 5 \cdot 10^3$, $n = 3 \cdot 10^9$ см $^{-3}$, $T_{e0} = 50$ K.

ленный штрих) при $t = 1$ мкс и $t = 10$ мкс в сравнении с исходной функцией распределения вида (1.1.5.1) (красная сплошная). Параметры функции (1.1.5.1) выбраны соответственно каждому из моментов времени. Видно, что функция распределения остаётся нормальной, а изменяется лишь её дисперсия.

3.2.3 Температура электронов

Основной обмен энергией между частицами плазмы происходит на начальных стадиях процесса расширения. Это показано на Рис. 3.2.3.1(a), где изображены кинетическая энергия электронов, ионов и энергия их потенциального

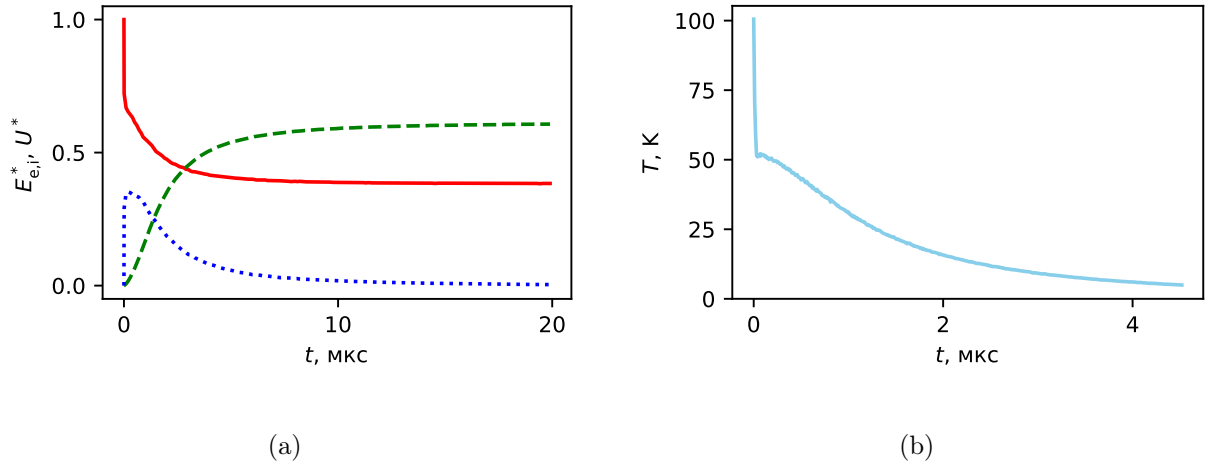


Рис. 3.2.3.1: Зависимости от времени: (а) нормированной кинетической энергии электронов (сплошная), ионов (штрих) и потенциального взаимодействия (пунктир) для $N = 5 \cdot 10^3$, $n = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$; (б) температуры электронов для $N = 10^4$, $n = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$.

взаимодействия, отнесённые к начальной температуре электронов. Электроны плазмы отдают свою кинетическую энергию ионам, что приводит к замедлению первых и ускорению вторых. Причём, передача энергии происходит как за счёт кулоновских столкновений, так и посредством взаимодействия частиц с некоторым самосогласованным полем, энергию которого можно записать как:

$$U_{ei} = e \int (n_i - n_e) \phi dr, \quad (3.2.3.1)$$

где $\phi = \phi(r, t)$ потенциал этого поля.

Зависимость температуры электронов от времени $T_e(t)$ для $n = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$ и $N = 10^4$ изображена на Рис. 3.2.3.1(b). Начальный резкий спад, в частности, обусловлен тем, что быстрые электроны покидают плазму. Дальнейшее убывание температуры обусловлено процессом обмена энергией с ионами, о котором сказано выше. Величина T_e здесь определена как:

$$T_a = \frac{m_a}{3k_b} \langle v_a^2 \rangle, \quad (3.2.3.2)$$

где $a = e$ – тип частицы, в данном случае соответствующий электрону.

3.3 Динамика ионов

Основные особенности динамики ионов проявляются на более поздних, в сравнении с динамикой электронов, временах. Это обусловлено не только их сравнительно большой массой и низкой начальной кинетической энергией, но и возникшим в плазме дисбалансом зарядов.

3.3.1 Температура ионов

Моделирование показывает, что в начале процесса расширения плазмы происходит достаточно быстрый разогрев ионов (это же наблюдается и в эксперименте, см. раздел 1.3.2). Это обусловлено как тем, что ионы перестраиваются под вновь возникший потенциальный “рельеф”. Это обусловлено тем, что в нулевой момент времени распределение ионов повторяет равновесное распределение нейтральных атомов, и обменом энергией с электронами, что было показано ранее.

Первое выражение из (1.5.1.8) можно переписать как $\sigma(t) = \sqrt{\sigma_0^2 + c_s^2 t^2}$. Отсюда видно, что при расширении плазмы в вакуум ионы совершают баллистическое движение, при котором, как известно, столкновения практически отсутствуют. Это приводит к тому, что ионы обладают большой радиальной скоростью, которую необходимо учитывать при вычислении T_i .

Для вычисления T_i поступим следующим образом. Исходя из предположения о том, что скорости ионов линейно зависят от радиуса, разобьём расстояние до границы плазмы на некоторое число интервалов. Внутри каждого из таких интервалов вычисляется величина:

$$\frac{dV_r^{(j)}}{dr} = \left\langle \frac{\mathbf{v}_i^{(j)} \mathbf{r}_i^{(j)}}{(r_i^{(j)})^2} \right\rangle, \quad (3.3.1.1)$$

здесь (j) это номер интервала, а угловые скобки означают усреднение в его пределах.

Воспользуемся полученным результатом как поправкой к (3.2.3.2) для вычисления $T_i^{(j)}$, в пределах интервала:

$$T_i^{(j)} = \frac{m_i}{3k_b} \left\langle \left(\mathbf{v}_i^{(j)} - \mathbf{r}_i^{(j)} \frac{dV_r^{(j)}}{dr} \right)^2 \right\rangle, \quad (3.3.1.2)$$

здесь угловые скобки обозначают усреднение в пределах интервала j .

Теперь можно получить T_i :

$$T_i = \langle T_i^{(j)} \rangle, \quad (3.3.1.3)$$

здесь угловые скобки обозначают усреднение по интервалам.

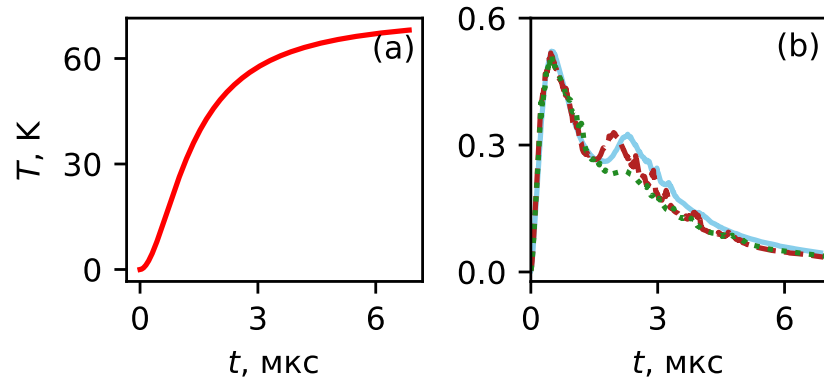


Рис. 3.3.1.1: Зависимость $T_i(t)$, вычисленная для плазмы ^{88}Sr : (a) без учёта радиальной скорости; (b) $T_{e0} = 100 \text{ K}$, $N = 10^4$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$ (сплошная), $T_{e0} = 100 \text{ K}$, $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$ (штрих), $T_{e0} = 50 \text{ K}$, $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$ (пунктир).

На Рис. 3.3.1.1 приведены результаты, полученные обоими методами. Так, на Рис. 3.3.1.1(a) изображена температура ионов для ^{88}Sr , $N = 10^4$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$, вычисленная с помощью выражения (3.2.3.2), которое не учитывает радиальное движение. Этот же режим представлен сплошной линией на Рис. 3.3.1.1(b), где радиальное движение ионов учтено. Видно, что использование выражения (3.2.3.2) приводит к неверному результату.

Развивающиеся колебания в зависимости $T_i(t)$ обусловлены, наступающим после disorder-induced heating, квазиравновесным состоянием. Однако, затем эти осцилляции пропадают, поскольку плазма расширяется. Этот результат согласуется результатами экспериментов и модели, представленных в [72].

Заметим, что предложенный метод позволяет не менять граничные условия задачи. Так, в работе [72] при моделировании использованы периодические граничные условия. Применимость этих условий к данной задаче, вообще говоря, ограничена.

3.3.2 Распределение ионов и формирование ионного фронта

Основная аналитическая модель содержит допущение о том, что вид функции распределения координат ионов сохраняется во времени (см. раздел 1.5.1) и позволяет оценить зависимость $\sigma(t)$ с помощью выражения (1.3.5.1). На Рис.

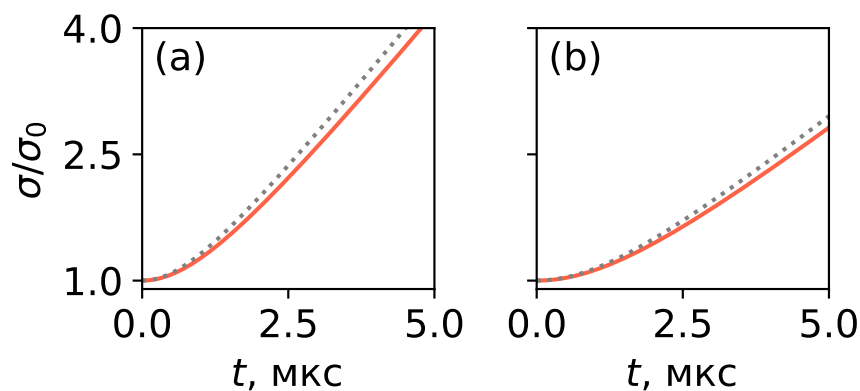


Рис. 3.3.2.1: Зависимости $\sigma(t)$ (сплошная) в сравнении с выражением (1.3.5.1) (пунктир) нормированные на свои начальные значения для: (a) ^{88}Sr , $T_{e0} = 50 \text{ K}$, $N = 5 \cdot 10^3$; (b) ^{88}Sr , $T_{e0} = 50 \text{ K}$, $N = 2.5 \cdot 10^4$; Всюду $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$.

3.3.2.1 изображены зависимости $\sigma(t)$ полученные при моделировании в сравнении с результатом, даваемым (1.3.5.1), для двух различных начальных температур электронов. Видно незначительное отклонение результатов от теоретической зависимости.

Моделирование показывает, что, в отличие от электронов, допущение о сохранении вида функции распределения координат ионов во времени не является верным. На Рис. 3.3.2.2 изображена функция распределения ионов в моменты времени $t = 1 \text{ мкс}$ и $t = 10 \text{ мкс}$ в сравнении с функцией вида (1.1.5.1), вычисленной для тех же времен. На границе плазмы возникает искажение распределения с резким спадом [1; 2].

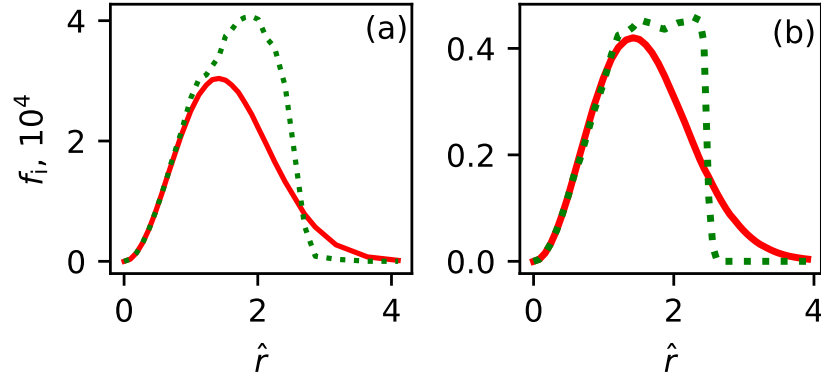


Рис. 3.3.2.2: Функция распределения ионов (штрих) в сравнении с исходной (сплошная) для ^{88}Sr и $T_{e0} = 50 \text{ K}$, $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ в различные моменты времени: (a) $t = 1 \text{ нс}$ и (b) $t = 10 \text{ нс}$.

Такой вид функции распределения характерен для поверхности разрыва (по аналогии с ударной волной), т.е. ионного фронта.

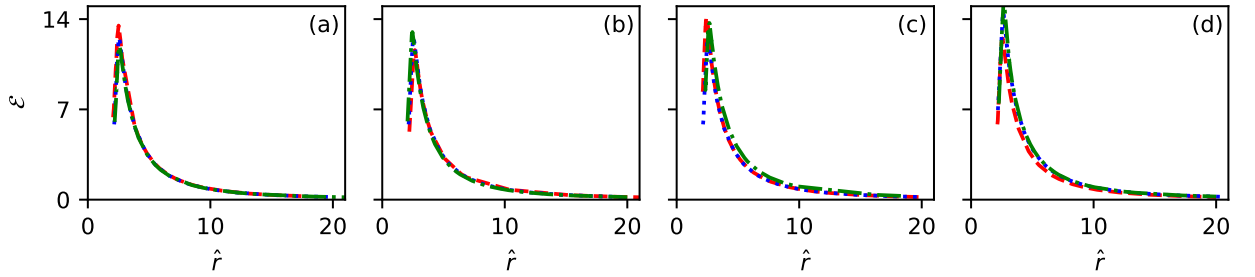


Рис. 3.3.2.3: Зависимость безразмерного электрического поля от безразмерного расстояния $\mathcal{E}(\hat{r})$ для различных режимов: (a) $N = 5 \cdot 10^3$, $T_{e0} = 50 \text{ K}$, $n_0 = 3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ и трёх различных моментов времени: $t = 10, 15, \text{ и } 20 \text{ нс}$; (b) $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$, $t = 15 \text{ нс}$ и трёх значений начальных температур электронов: $T_{e0} = 25, 50, \text{ и } 100 \text{ K}$; (c) $N = 5 \cdot 10^3$, $t = 15 \text{ нс}$, $T_{e0} = 50 \text{ K}$ и трёх значений начальной пиковой концентрации: $n_0 = 10^9, 3 \cdot 10^9, \text{ и } 10^{10} \text{ см}^{-3}$; (d) $t = 15 \text{ нс}$, $T_{e0} = 50 \text{ K}$, $n_0 = 3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ и трёх различных чисел частиц: $N = 5 \cdot 10^3, 1.25 \cdot 10^4, \text{ и } 2.5 \cdot 10^4$.

Дальнейшее расширение плазмы определяется движением этого фронта, который формируется в виде заряженного слоя на границе плазмы из-за возникшего ранее дисбаланса зарядов. Радиальное распределение электрического поля плазмы достигает своего максимума в области этого слоя. После того, как

фронт сформировался, электрическое поле можно записать в виде [1; 2]:

$$E(r, t) \approx \frac{e\Delta N}{\sigma^2(t)} \mathcal{E}(\hat{r}), \quad (3.3.2.1)$$

где $\mathcal{E}(\hat{r})$ некоторая безразмерная величина.

Безразмерная величина электрического поля оказывается одинаковой для всех наборов параметров плазмы [2]. Это показано на Рис. 3.3.2.3, где изображены зависимости $\mathcal{E}(\hat{r})$ для различных значений N , n_0 , T_{e0} , а так же для различных моментов времени. Безразмерное электрическое поле практически не зависит от параметров плазмы. Такое поведение $\mathcal{E}(\hat{r})$ позволяет говорить о том, процесс расширения ультрахолодной плазмы в вакуум подобен при различных значениях её параметров и носит автомодельный характер.

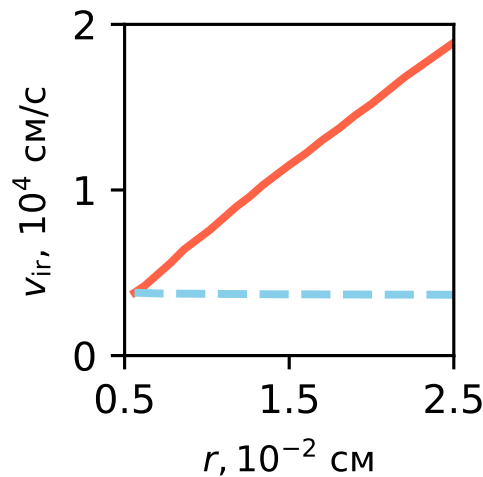


Рис. 3.3.2.4: Зависимости от расстояния радиальной скорости ионов (сплошная) и скорости ионного звука (штрих) при $t = 1.2 \text{ мкс}$ для ^{88}Sr и $T_{e0} = 100 \text{ K}$, $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

Радиальная скорость ионов превосходит скорость ионного звука c_s [1]. Это продемонстрировано на Рис. 3.3.2.4. В то время, как скорость ионного звука не зависит от расстояния, радиальная скорость ионов зависит от него линейно. Таким образом, допущение об этом, сделанное при вычислении температуры ионов основано на результатах моделирования.

Отметим, что для экспоненциального начального распределения концентрации, задаваемого выражением (1.1.5.2), тоже характерно образование ионного

фронта, однако, надо иметь в виду, что распределение электрического поля не является сферически симметричным.

3.3.3 Движение ионного фронта

Процесс расширения плазмы носит автомодельный характер и определяется движением ионного фронта [1].

То обстоятельство, что величина $\mathcal{E}$ является одинаковой в широком диапазоне параметров плазмы, позволяет написать уравнение движения для ионов фронта.

Перепишем электрическое поле в виде:

$$E = \frac{eN^{2/3}}{r} \mathcal{E}. \quad (3.3.3.1)$$

Поскольку тепловые скорости ионов малы, пренебрегая трением об электроны, в силу его малости, для ионов можно написать [1]:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e\mathbf{E} = \frac{eN^{2/3}}{r^2} \mathbf{r} \mathcal{E}. \quad (3.3.3.2)$$

Введём теперь безразмерные величины: $\tilde{r} = r/r_0$, $\tilde{t} = t/t_0$, $\tilde{v} = v_i t_0/r_0$, где $r_0 = (N/n_0)^{1/3}$. С их помощью можно переписать уравнение (3.3.3.2) в виде [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} &= \lambda \frac{\tilde{r} \mathcal{E}}{\tilde{r}^3}, \text{ где} \\ \lambda &= \frac{e^2 n_0 t_0^2}{m_i N^{1/3}}. \end{aligned} \quad (3.3.3.3)$$

Полагая $\lambda = 1$ получаем [1]:

$$\begin{aligned} t_0 &= \sqrt{\frac{m_i}{e^2 n_0}} N^{1/6} \\ v_0 &= \frac{e(Nn_0)^{1/6}}{\sqrt{m_i}}. \end{aligned} \quad (3.3.3.4)$$

Первое из двух выражений (3.3.3.4) даёт оценку времени возникновения ионного фронта в зависимости от параметров плазмы. Время формирования фронта t_f зависит лишь от пиковой начальной концентрации и числа частиц, но не зависит от температуры.

Скорость движения ионного фронта v_f постоянна. Эту скорость можно оценить с помощью второго из выражений (3.3.3.4):

$$v_f = p \cdot v_0, \quad (3.3.3.5)$$

где p некоторый поправочный коэффициент.

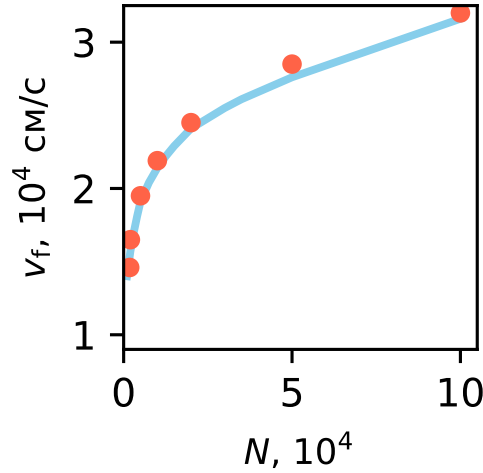


Рис. 3.3.3.1: Зависимость скорости ионного фронта v_f от числа частиц N результаты моделирования (точки) в сравнении с оценкой (3.3.3.5) (сплошная).

На Рис. 3.3.3.1 изображена зависимость $v_f(N)$. Точки получены из моделирования, а сплошная линия соответствует выражению (3.3.3.5) при величине параметра $p = 2.5$ [1].

Приведём теперь оценки для t_f , имея в виду параметры реального эксперимента. Так, для плазмы ^{88}Sr , $n_0 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ и $N = 10^8$ получаем $t_f = 3.5$ мкс.

3.3.4 Об экспоненциальном распределении концентрации

В случае экспоненциального распределения, которое имеет место в работе [15], процессы, происходящие в плазме, развиваются аналогично случаю нормального распределения. Тем не менее, имеется ряд особенностей.

Исходное распределение координат деформируется, однако это происходит неравномерно. Для того, что бы продемонстрировать это, рассмотрим отношение диаметра плазмы к её высоте. Имея в виду, что параметр $\eta = 4$, получаем

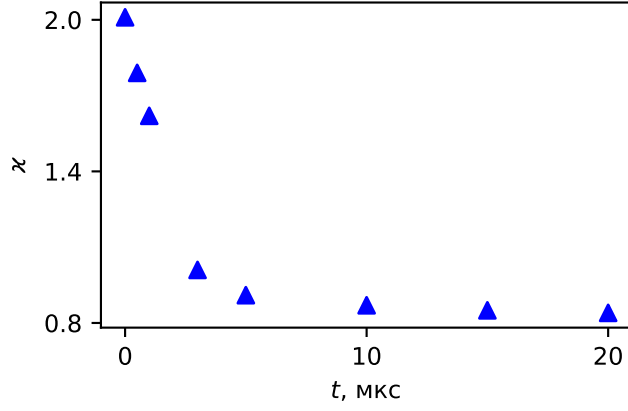


Рис. 3.3.4.1: Отношение диаметра плазмы к её высоте в зависимости от времени для $N = 5 \cdot 10^3$, $n = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$.

$\langle x^2 \rangle = 4\sigma_0^2$ и $\langle \rho^2 \rangle = \langle y^2 + z^2 \rangle = 32\sigma_0^2$. Таким образом, отношение диаметра плазмы к её высоте есть $\kappa = \sqrt{\langle \rho^2 \rangle / 2\langle x^2 \rangle} = 2$. Зависимость $\kappa(t)$ приведена на Рис. 3.3.4.1. Облако плазмы расширяется быстрее вдоль направления x , что обусловлено неоднородностью электрического поля плазмы [2].

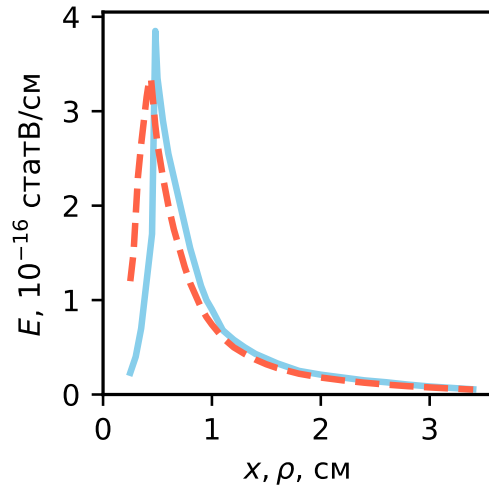


Рис. 3.3.4.2: Зависимости $E(x, 0)$ статВ/см (сплошная) и $E(\rho, 0)$ статВ/см в момент времени $t = 30 \text{ мкс}$ для $N = 5 \cdot 10^3$, $n = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$.

Слой ионного фронта искажен таким же образом, как это представляется из данных Рис. 3.3.4.1. Электрическое поле вдоль направлений x и ρ изображено на Рис. 3.3.4.2. Как и в сферически-симметричном случае, максимуму электрического поля соответствует ионный фронт [2].

3.4 Заключение к разделу

Проведено молекулярно-динамическое моделирование процесса расширения ультрахолодной плазмы в вакуум и рассмотрены происходящие при этом физические процессы. Величины ΔN и $\sigma(t)$ находятся в хорошем согласии с результатами аналитических выражений, которые, в свою очередь, согласуются с данными экспериментов [7]. Кроме того, моделирование воспроизводит колебания температуры ионов, наблюдаемые в экспериментах [72]. Таким образом, можно говорить о верификации модели в диапазоне начальных пиковых концентраций от 10^9 до 10^{10} см $^{-3}$ и начальных температур электронов от 20 до 100 К.

Показано, что в широком диапазоне параметров, происходящие в плазме процессы оказываются подобными, поскольку безразмерная величина электрического поля одинакова.

Нарушение электронейтральности плазмы приводит к формированию ионного фронта. Это выражается в искажении исходной функции распределения ионов, которая приобретает резкий, характерный для фронта, спад. Движение ионного фронта носит автомодельный характер.

Получены оценки для времени возникновения ионного фронта и скорости его движения: $t_f \propto N^{1/6}/\sqrt{n_0}$ и $v_f \propto (n_0 N)^{1/6}$.

Основные результаты этого раздела опубликованы в работах [1; 2]. Явление формирования ионного фронта подтверждено экспериментально группой под руководством Киллиана [73].

Глава 4. Ультрахолодная плазма в квадрупольном магнитном поле

Интерес к динамике ультрахолодной плазмы во внешних полях и развивающихся в ней неустойчивостях обусловлен прежде всего тем, что она является объектом, на котором возможно изучать различные явления, присущие другим видам низкотемпературной [8] и горячей плазмы [74].

В данном разделе приведены результаты молекулярно-динамического моделирования ультрахолодной плазмы во внешнем постоянном квадрупольном магнитном поле.

Обсуждаются особенности процесса расширения ультрахолодной плазмы, обуславливающие колебаниям радиальной скорости ионов.

Рассматривается удерживающее влияние магнитного поля. В частности, изучается влияние величины магнитного поля и начальной температуры электронов на удержание плазмы.

Представленные результаты дополняют собой данные, полученные в экспериментах [16; 75] (см. разделы 1.4.1 и 1.4.2).

4.1 Начальные и граничные условия

В модели такие параметры плазмы, как σ_0 и N , существенно меньше своих экспериментальных значений. Для того, что бы сделать возможным сравнение экспериментальных результатов с результатами моделирования, необходимо выбрать величину градиента магнитного поля B' соответствующим образом.

4.1.1 Параметры подобия

Введём безразмерные величины $\hat{r} = r/\sigma_0$, $\hat{t} = t/\tau_{\text{exp}}$, $\hat{u} = v_i/c_s$, где τ_{exp} и c_s определены выражениями (1.5.1.9) и (3.1.1.1) соответственно. Тогда для функции распределения ионов можно написать безразмерное кинетическое уравне-

ние Больцмана[3]:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{u}} \frac{\partial f_i}{\partial \hat{\mathbf{r}}} + \beta [\hat{\mathbf{u}} \mathbf{b}] \frac{\partial f_i}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = 0, \quad (4.1.1.1)$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B'\sigma_0$ и $\beta = eB'\sigma_0^2/(c\sqrt{m_i k_b T_{e0}})$.

При моделировании величина B' должна выбираться таким образом, что бы безразмерный параметр β совпадал со своим экспериментальным значением. Отметим, что соотношение циклотронного радиуса электрона и характерного размера плазмы определено тем же параметром: $\sqrt{m_e/m_i}/\beta$ [3].

4.1.2 Параметры моделирования

Аналогично эксперименту [16], моделируется ультрахолодная плазма ^{88}Sr . При этом, массы электрона и иона соответствуют своим реальным значениями, а число частиц составляет $N_i = N_e = 10^4$.

В начальный момент времени концентрация частиц имеет экспоненциальное распределение вида (1.1.5.2), а её пиковое значение n_0 лежит в диапазоне от 10^9 до $3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$.

Начальная температура электронов T_{e0} изменяется в диапазоне от 20 до 200 К. Начальная температура ионов составляет $T_{i0} = 10^{-3} \text{ К}$.

Плазма находится во внешнем постоянном квадрупольном магнитном поле, ось симметрии которого совпадает с осью Z декартовой системы координат. Магнитное поле характеризуется величиной своего градиента вдоль этой оси.

Для указанных T_{e0} и n_0 параметр β изменяется как $0.1\beta_e < \beta < 2\beta_e$, где β_e соответствует экспериментальному значению для $B'_e = 150 \text{ Гс/см}$. Таким образом, величина градиента магнитного поля при моделировании лежит в диапазоне $B' = 1.5 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^4 \text{ Гс/см}$ [3].

Магнитное поле вычисляется согласно описанному в разделе 2.1.2, в каждой точке, где находится какая-либо частица.

При интегрировании уравнений движения используется модифицированная схема Верле (2.1.3.11). Начальные условия сгенерированы способами, описан-

ными в разделе 2.

4.2 Динамика электронов

Рассмотрим вначале динамику электронов. Это связано с тем, что, как и в случае расширения плазмы в вакуум, явления, происходящие с электронами, обуславливают ряд физических процессов, происходящих с ионами.

4.2.1 Дисбаланс зарядов и его структура

Аналогично случаю расширения плазмы в вакуум в отсутствии магнитного поля (см. раздел 3.2.1), часть электронов покидает плазму. Тем не менее, моделирование показывает, что имеется ряд существенных отличий.

Во-первых, дисбаланс зарядов ΔN демонстрирует медленный постепенный рост, а не быстро выходит на постоянную величину. Это хорошо видно из Рис. 4.2.1.1(а), где изображены зависимости $\Delta N(\hat{t})$ для различных величин B' . Кроме того, моделирование даёт одинаковую зависимость $\Delta N(\hat{r})$ в рассматриваемом диапазоне величин B' .

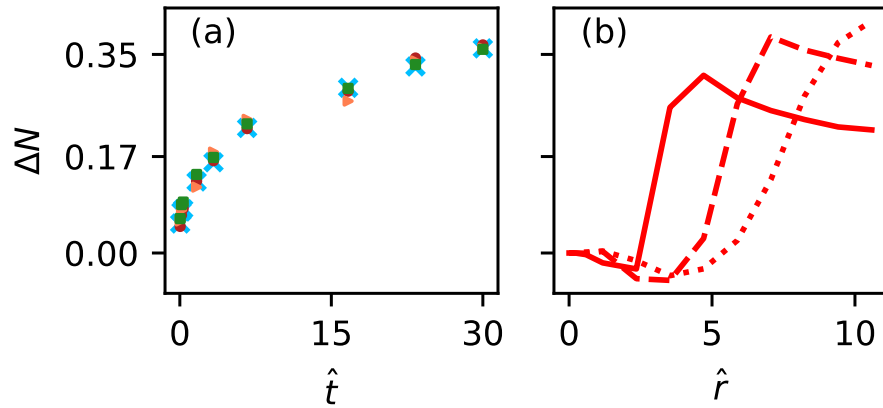


Рис. 4.2.1.1: Зависимости: (а) $\Delta N(\hat{t})$ для различных градиентов магнитного поля $B' = 10^3$ Гс/см (иксы), $B' = 3 \cdot 10^3$ Гс/см (круги), $B' = 6 \cdot 10^3$ Гс/см (квадраты); $B' = 1.5 \cdot 10^4$ Гс/см (треугольники); (б) $\Delta N(\hat{r})$ в различные моменты времени $\hat{t} = 2.5$ (сплошная), $\hat{t} = 5$ (штрих) и $\hat{t} = 7.5$ (пунктир) при $\beta = 38$; для $N = 10^4$, $T_{e0} = 20$ К, $n = 10^9$ см $^{-3}$.

Во-вторых, дисбаланс зарядов имеет сложную пространственную структуру

[4]. Так, в одних областях плазмы преобладают ионы, а в других электроны, причём эти области существуют одновременно. На Рис. 4.2.1.1(b) показаны зависимости $\Delta N(\hat{r})$ в различные моменты времени. Видно, что величина $\Delta N(\hat{r})$ знакопеременная.

Такое распределение зарядов в плазме приводит к формированию сложного потенциального рельефа, что, как будет показано далее, оказывает влияние на движение ионов.

4.2.2 Распределение координат электронов

Воздействие внешнего поля приводит к тому, что изначальная функция распределения координат электронов существенно меняет свой вид. Как известно,

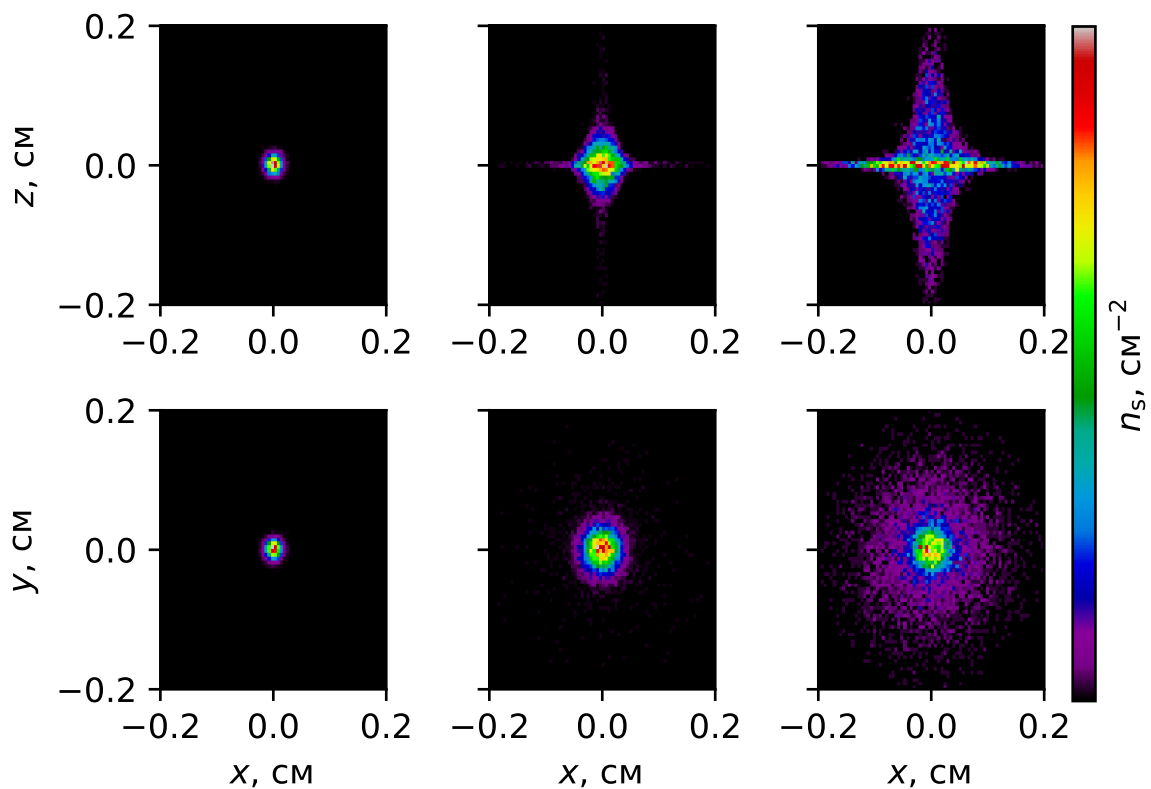


Рис. 4.2.2.1: Проекции электронов на плоскости XZ (верх) и XY (низ) в различные моменты времени: $t = 0$ мкс, $t = 5$ мкс и $t = 15$ мкс, для $T_{e0} = 20$ К, $N = 10^4$, $n = 10^9$ см $^{-3}$, $B' = 1.5 \cdot 10^3$ Гс/см. Цветная шкала представляет собой нормированную плотность n_s см $^{-2}$ на единицу площади.

существует три основных вида траекторий заряженных частиц в таком поле

[64]. Его воздействие приводит к тому, что распределение частиц в пространстве приобретает характерный вид, обусловленный симметрией магнитного поля. Электроны сравнительно редко пересекают линии магнитного поля, в основном двигаясь вдоль направлений симметрии поля. В случае рассматриваемой геометрии такими направлениями являются прямая Z и плоскость XY .

Это видно на Рис. 4.2.2.1, где изображены проекции частиц на плоскость XZ (верх) и плоскость XY (низ) в различные моменты времени. С течением времени распределение теряет свою сферическую симметрию и подстраивается под линии магнитного поля.

4.2.3 Температура электронов

Имея в виду сказанное в предыдущем разделе, говорить о сферической симметрии распределения допустимо лишь внутри небольшой области. Центром этой области является точка, магнитное поле в которой равно нулю. При вычислении температуры электронов рассматривается небольшая сферическая область. Результаты, даваемые выражением (3.2.3.2) в пределах такой области изображены на Рис. 4.2.3.1, где приведены зависимости $T_e(t)$ для различных

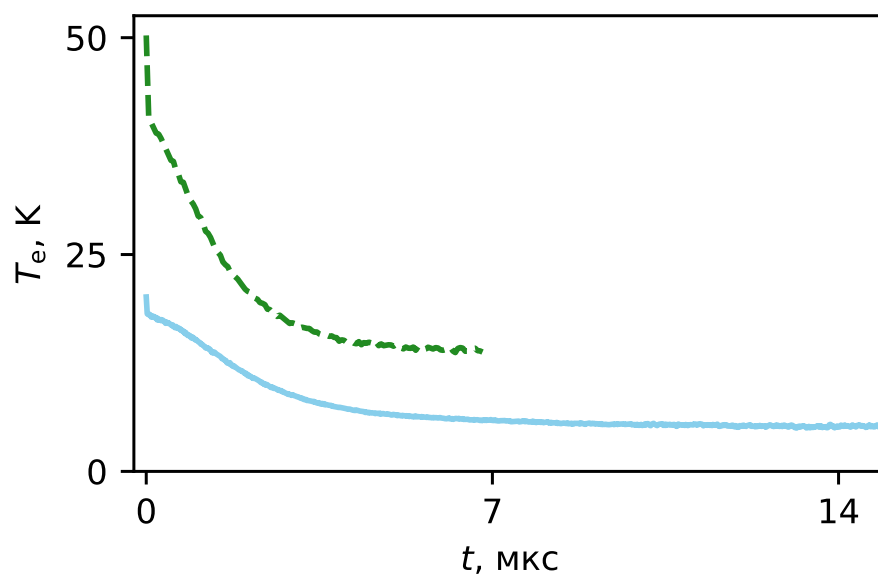


Рис. 4.2.3.1: Зависимости $T_e(t)$ для $T_{e0} = 20$ К (сплошная) и $T_{e0} = 50$ К (штрих) при $N = 10^4$, $n = 10^9$ см⁻³, $B' = 1.5 \cdot 10^3$ Гс/см.

режимов. Причины для резкого спада вначале представляются теми же, что и в случае расширения плазмы в вакуум. Однако, есть и отличие, заключающееся в сравнительно медленном убывании $T_e(t)$, что обусловлено замедлившимся расширением плазмы (об этом будет сказано далее).

4.3 Динамика ионов

Динамика ионов, аналогично электронам, тоже демонстрирует ряд особенностей, обусловленных влиянием внешнего поля. Рассмотрим их более подробно.

4.3.1 Распределение координат ионов

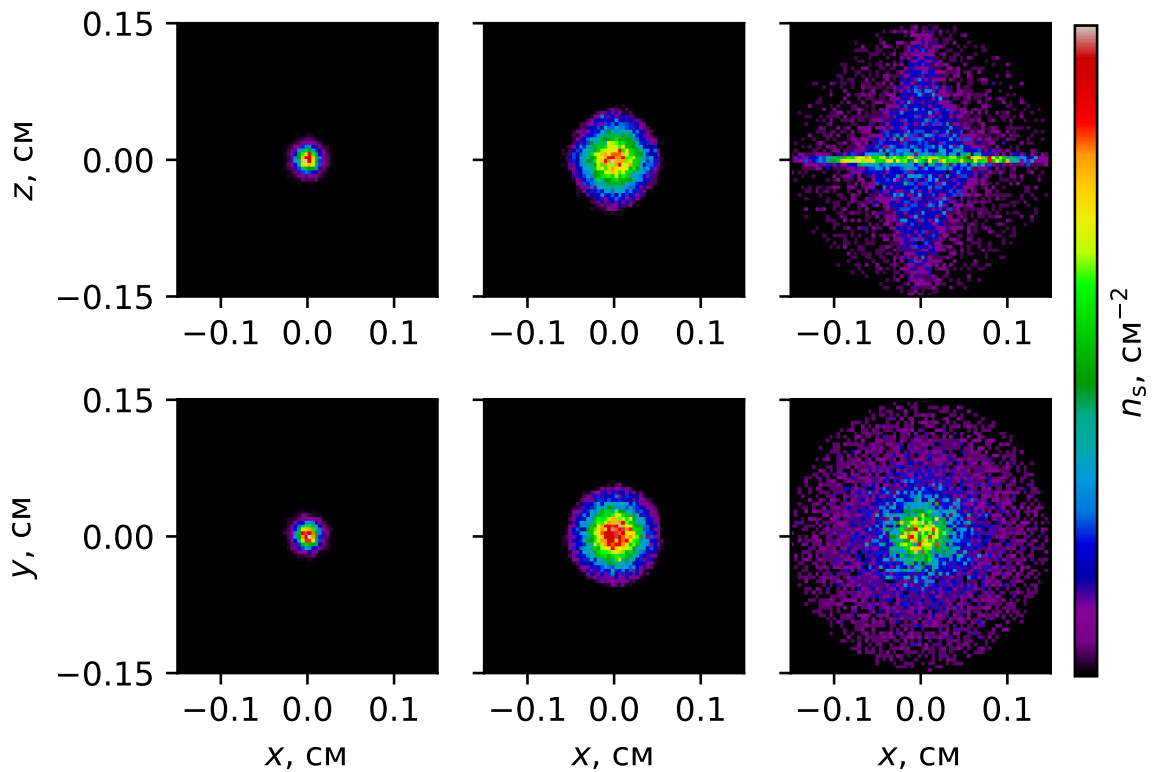


Рис. 4.3.1.1: Проекции ионов на плоскости XZ (верх) и XY (низ) в различные моменты времени: $t = 0$ мкс, $t = 5$ мкс и $t = 15$ мкс, для $T_{e0} = 20$ К, $N = 10^4$, $n = 10^9$ см^{-3} , $B' = 1.5 \cdot 10^3$ Гс/см. Цветная шкала представляет собой нормированную плотность n_s см^{-2} на единицу площади.

На Рис. 4.3.1.1 изображено распределение ионов в пространстве для различных моментов времени. Вначале магнитное поле не оказывает существенного влияния на динамику ионов и процесс расширения плазмы преимущественно определяется электрическими силами. Кроме того, ионы обладают существенно большей массой и поэтому их начальное распределение координат сохраняется дольше, что видно из Рис. 4.3.1.1 (средний столбец), где изображено распределение ионов в момент времени $t = 5$ мкс. Для сравнения, к этому моменту времени, распределение электронов уже существенно изменило свой вид, что видно на Рис. 4.2.2.1 (средний столбец).

Тем не менее, со временем, магнитное поле начинает оказывать существенное влияние на движение ионов. Граница плазмы подстраивается под силовые линии магнитного поля и приобретает характерную симметрию, что изображено на Рис. 4.3.1.1 (правый столбец). Этот результат согласуется с данными, представленными в эксперименте [16]. Аналогично электронам, ионы расширяются в основном вдоль направлений симметрии поля.

Таким образом, главной особенностью является то, что, в отличие от случая расширения плазмы в вакуум, не происходит формирования ионного фронта (см. раздел 3.3.2). Процесс расширения плазмы определяется магнитным полем.

4.3.2 Температура ионов

Как уже говорилось, сферическая симметрия распределения частиц плазмы слабо нарушается лишь в небольшой области около начала координат. В этой области возможно вычисление температуры ионов при помощи выражений (3.3.1.1) – (3.3.1.3). На Рис. 4.3.2.1 представлены зависимости $T_i(t)$ для различных режимов.

В отличие от случая расширения плазмы в вакуум (см. раздел 3.3.1), здесь имеется ряд особенностей.

Первая из них состоит в том, что не наблюдается колебаний $T_i(t)$, обусловленных квазиравновесием плазмы.

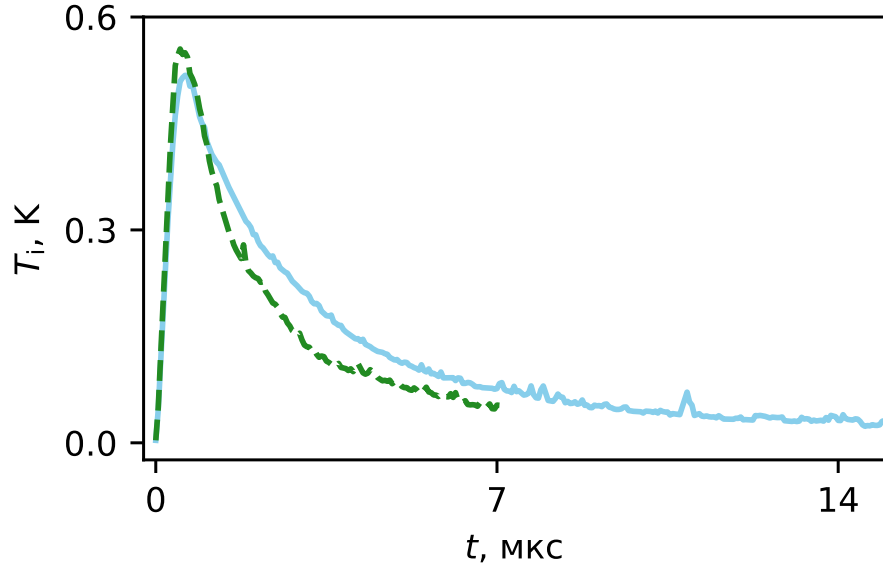


Рис. 4.3.2.1: Зависимости $T_i(t)$ для $T_{e0} = 20$ K (сплошная) и $T_{e0} = 50$ K (штрих) при $N = 10^4$, $n = 10^9$ см $^{-3}$, $B' = 1.5 \cdot 10^3$ Гс/см.

Вторая заключается в том, что, после выхода на максимум, на поздних временах, большей T_{e0} соответствует меньшая T_i . Таким образом, в случае более горячих электронов, ионы плазмы остывают быстрее. Отметим, что аналогичный результат наблюдается и в однородном магнитном поле, в эксперименте [26].

Это можно объяснить при помощи следующих качественных оценок. Как известно [76], частота электрон-ионных столкновений пропорциональна температуре электронов:

$$\nu_{ei} \propto \frac{1}{\sqrt{T_e^3}}. \quad (4.3.2.1)$$

При столкновении электрона с ионом, последний получает некоторую долю энергии:

$$\Delta E \propto \frac{m_e}{m_i} k_b T_e. \quad (4.3.2.2)$$

В центральной области плазма квазинейтральна, поэтому $n_i \approx n_e$ и за время τ ионы получают энергию:

$$Q = \nu \Delta E \propto \frac{1}{\sqrt{T_e}}. \quad (4.3.2.3)$$

Если $T_{e1} < T_{e2}$, из последнего получаем:

$$\frac{Q_1}{Q_2} \propto \sqrt{\frac{T_{e2}}{T_{e1}}}, \quad (4.3.2.4)$$

т.е. $Q_1 > Q_2$.

В магнитном поле этот эффект, по-видимому, более выражен из-за того, что плазма расширяется медленнее и электроны взаимодействуют с ионами дольше.

4.3.3 Колебания радиальной скорости ионов

Знакопеременный дисбаланс зарядов обуславливает сложный потенциальный рельеф для частиц плазмы. Так, при $\Delta N < 0$ возникает электрическая потенциальная яма для ионов, а при $\Delta N > 0$ для электронов.

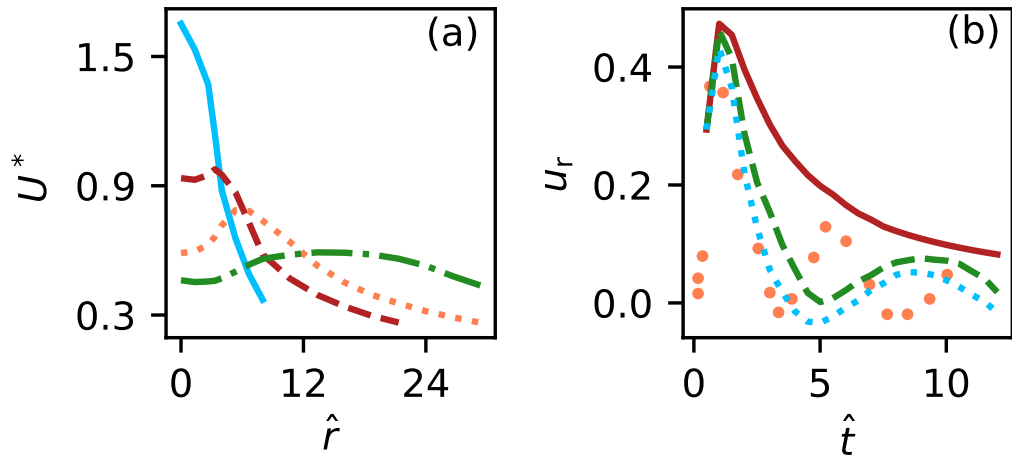


Рис. 4.3.3.1: Зависимости (а) энергии $U^*(\hat{r})$ иона ^{88}Sr , $\beta = 38$ в различные моменты времени – $\hat{t} = 0.5$ (сплошная), $\hat{t} = 1.5$ (штрих), $\hat{t} = 2.5$ (пунктир), $\hat{t} = 5$ (штрих-пунктир); (б) нормированной радиальной скорости u_r иона ^{88}Sr для $\beta = 0$ (сплошная), $\beta = 38$ (штрих, плоскость $x = 0$), $\beta = 38$ (вдоль оси симметрии поля, пунктир), ^{40}Ca , $B'_e = 120$ Гс/см, (эксперимент [75], круги).

В центре плазмы возникает электрическая потенциальная яма для ионов. На Рис. 4.3.3.1(а) показана зависимость потенциальной энергии иона, отнесенная к начальной температуре электронов $U^* = U/T_{e0}$, от расстояния в различные моменты времени. Величина потенциальной энергии усреднена по угловым ко-

ординатам. Видно, что с течением времени формируется потенциальная яма, ширина которой растёт [4].

По-видимому, потенциальная яма приводит к колебаниям радиальной скорости ионов [4]. На Рис. 4.3.3.1(b) изображена зависимость нормированной радиальной скорости иона $u_r = \tau_{\text{exp}} v_{ir}/r$ от времени в присутствии магнитного поля и без него. Величина u_r не испытывает колебаний без магнитного поля, в то время как при $B' \neq 0$ наблюдаются её колебания.

Точки, изображенные на Рис. 4.3.3.1(b), соответствуют данным, представленным в эксперименте [75]. Видно, что колебания происходят быстрее. Это обусловлено тем, что в эксперименте [75] другие параметры плазмы. Прежде всего, плазма эксперимента [75] получена из атомов ^{40}Ca . Тем не менее, мы считаем, что данные находятся в качественном согласии друг с другом.

В заключение отметим, что о колебаниях ионных скоростей отмечено и в эксперименте [16].

4.3.4 Удержание плазмы

Для оценки зависимости $n_i(t)$, аналогично эксперименту [16], рассматривается цилиндрическая область с размерами $r < 5\sigma_0$, $|x| = 2.5\sigma_0$, внутри которой вычисляется средняя плотность. Центр цилиндра совпадает с началом координат [3].

Воздействие магнитного поля приводит к удержанию плазмы. Эффект удержания выражается в том, что, в рассматриваемой области, зависимость концентрации ионов от времени убывает медленнее. На Рис. 4.3.4.1 (a) изображены зависимости $\lg(n_i(\hat{t})/n_{i0})$ для различных величин градиента магнитного поля. Символами изображены результаты моделирования, сплошной линией результат эксперимента [16]. Моделирование показывает, что с увеличением B' удерживающий эффект насыщается [3]. Заметим, факт насыщения удержания был подтвержден позднее в эксперименте [75].

В то же время, начальная температура электронов влияет на удержание

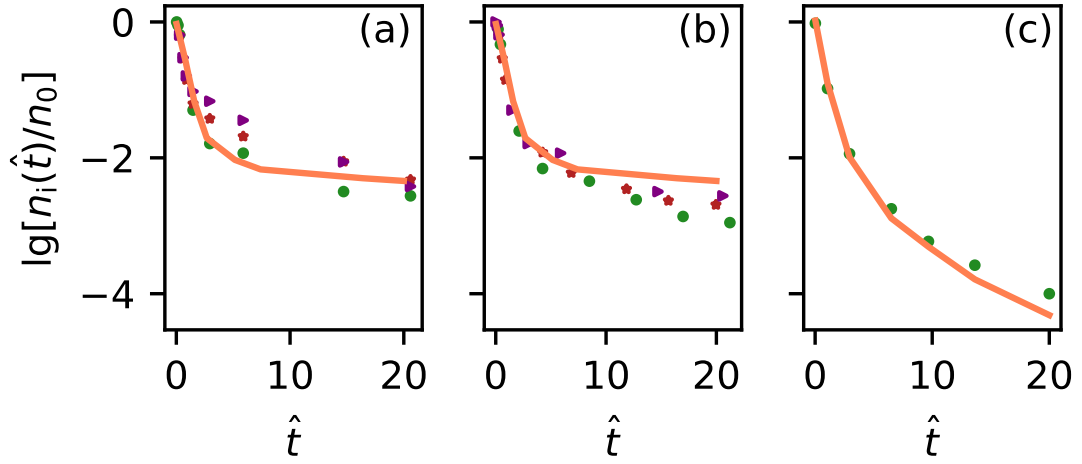


Рис. 4.3.4.1: Зависимости $\lg(n_i(\hat{t})/n_{i0})$: (a) $B'_e = 150$ Гс/см (эксперимент [16], сплошная), $B' = 3 \cdot 10^3$ Гс/см (круги), $B' = 10^4$ Гс/см (звезды), $B' = 3 \cdot 10^4$ Гс/см (треугольники) при $T_{e0} = 20$ К; (b) $T_{e0} = 40$ К (эксперимент [16], сплошная), $T_{e0} = 20$ К (круги), $T_{e0} = 40$ К (звезды), $T_{e0} = 200$ К (треугольники), $B' = 3 \cdot 10^3$ Гс/см; (c) $B'_e = 0$ Гс/см (эксперимент [16], сплошная), $B' = 0$ Гс/см (круги), $T_{e0} = 20$ К. Всюду символами обозначены результаты моделирования при $n_{i0} = 3 \cdot 10^9$ см $^{-3}$ и $N = 10^4$.

плазмы слабо [3]. Это видно из Рис. 4.3.4.1 (b), где для различных T_{e0} изображены зависимости $\lg(n_i(\hat{t})/n_{i0})$ при фиксированном значении B' . Сплошная линия представляет собой результат эксперимента [16], в то время как символами представлены результаты моделирования.

На Рис. 4.3.4.1 (c) изображены зависимости $\lg(n_i(\hat{t})/n_{i0})$ для случая расширения плазмы вакуум. Видно, что концентрация ионов убывает быстрее в отсутствии магнитного поля.

4.4 Заключение к разделу

Рассмотрена динамика плазмы в квадрупольном магнитном поле. Результаты моделирования находятся в хорошем согласии с экспериментами [16; 75].

На малых временах начальное распределение координат частиц плазмы нарушается слабо, поскольку процесс расширения определяется электрическими силами. Однако далее магнитное поле оказывает существенное влияние. Так,

плазма расширяется в основном вдоль направлений симметрии магнитного поля, которое формирует её характерную границу.

Дисбаланс зарядов растёт с течением времени и имеет сложную пространственную структуру. Это обстоятельство приводит к формированию электрических потенциальных ям, обуславливающих колебания скоростей ионов, представленных в [16; 75].

Наконец показано, что удерживающий эффект внешнего поля, обсуждаемый в [16], насыщается с ростом градиента квадрупольного магнитного поля.

Основные результаты этого раздела опубликованы в работах [3; 4]. Результат по насыщению времени удержания подтверждён экспериментально группой под руководством Бергесона [75].

Глава 5. Ультрахолодная плазма в однородных полях

В данном разделе рассматриваются физические процессы, происходящие в ультрахолодной плазме, находящейся в скрещенных постоянных однородных электрическом и магнитном полях. Воздействие этих полей приводит к существенно различной динамике ионов и электронов. Оказывается, существует два механизма, согласно которым электроны покидают плазму. Эти электроны дрейфуют с постоянной скоростью вдоль определенного направления. Кроме того, при реализации одного из этих механизмов, в образовавшейся электронной плазме возникает диокотронная неустойчивость

Полученные результаты могут представлять интерес в электронной микроскопии, поскольку ультрахолодные атомы уже активно используются в данных целях [77–80].

5.1 Начальные и граничные условия

Параметры моделирования выбраны с ориентиром на эксперимент [23], поскольку в нём реализованы схожие условия. Тем не менее, число частиц в эксперименте превышает число частиц, доступных для моделирования на несколько порядков, поэтому абсолютные значения как параметров плазмы, так и величин внешних полей различаются.

В модели массы частиц m_i и m_e соответствуют своим реальным значениям для ^{131}Xe и электрона соответственно. При этом $N = N_i = N_e = 5 \cdot 10^3$. В начальный момент времени концентрация частиц имеет нормальное распределение. Её пиковые значения варьируются от $n_0 = 10^7 \text{ см}^{-3}$ до $n_0 = 10^{11} \text{ см}^{-3}$.

Начальная температура ионов составляет $T_{i0} = 10^{-3} \text{ К}$. Начальная температура электронов лежит в диапазоне от $T_{e0} = 10 \text{ К}$ до $T_{e0} = 250 \text{ К}$.

Каких-либо граничных условий задача не имеет, однако к плазме приложены внешние однородные постоянные скрещенные электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное

$\mathbf{B}$ поля. Причём, электрическое поле направлено вдоль оси X , $\mathbf{E} = (E; 0; 0)$, а магнитное вдоль оси Z , $\mathbf{B} = (0; 0; B)$ декартовой системы координат. Напряженность электрического поля изменяется в диапазоне $E = 10^{-5} - 2.3 \cdot 10^{-4}$ статВ/см, а индукция магнитного поля в диапазоне $B = 5 - 60$ Гс.

При интегрировании уравнений движения используется модифицированная схема Верле (2.1.3.11). Начальные условия сгенерированы способами, описанными в разделе 2.

Проведено моделирование системы на временах до $t = 40$ мкс.

5.2 Различные механизмы потери электронов

Динамика электронов демонстрирует замечательные особенности. Моделирование предсказывает два механизма, в соответствии с которыми электроны покидают плазму. Первый из них проявляется в том, что электроны покидают плазму в виде сгустка. Второй в том, что электроны покидают плазму в виде протяженного пучка [5].

Сначала рассматриваются результаты моделирования, а затем приводится качественный анализ условий, приводящих к реализации того или иного механизма.

5.2.1 Электронный сгусток

Первый механизм потери электронов заключается в разделении исходных электронов на две доли [5]. Это демонстрирует Рис.5.2.1.1, где изображены проекции электронов и ионов на плоскость XY для $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9$ см $^{-3}$, $T_{e0} = 100$ К, $E = 10^{-5}$ статВ/см, $B=10$ Гс в различные моменты времени.

Электроны разделились на две части, проекции которых подобны. Первая часть электронов сгруппирована вблизи начала координат и представлена электронами изначальной плазмы.

Электроны, покинувшие плазму, сформировали на проекции второе пятно,

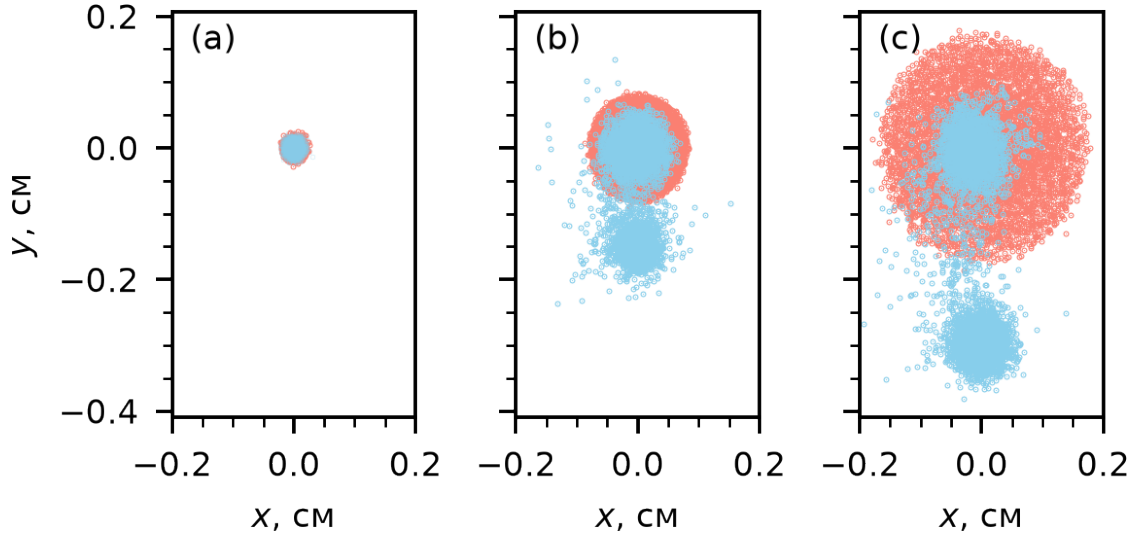


Рис. 5.2.1.1: Проекции координат электронов (синий) и ионов (красный) на плоскость XY для $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 100 \text{ K}$, $E = 10^{-5} \text{ статВ/см}$, $B = 10 \text{ Гс}$ в различные моменты времени: (a) $t = 0 \text{ мкс}$; (b) $t = 5 \text{ мкс}$; (c) $t = 10 \text{ мкс}$.

дрейфующее в направлении $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ с постоянной скоростью $V_d = -cE/B$ [5]. Отделившийся сгусток постепенно расширяется из-за кулоновского расталкивания. При этом, дисперсия вдоль направления Z много больше её же значений вдоль направлений X и Y . Это обусловлено тем, что вдоль направления Z действует единственная сила, обусловленная кулоновским взаимодействием частиц.

Отметим, что этот результат визуально похож на результат эксперимента [23], где получены проекции аналогичного вида. Тем не менее, этого недостаточно для утверждения о том, что воспроизведен экспериментальный результат. В частности, мы не наблюдаем признаков периодической эмиссии, а именно плазму покидает лишь один сгусток за всё время. Возможный электронный сигнал также не имеет периодической структуры, о чём будет сказано далее. Наконец, не удалось получить расщепления электронов на несколько частей. С одной стороны, эти явления могут быть обусловлены малым числом частиц, доступных для моделирования. С другой стороны, возможно, получен новый результат.

5.2.2 Электронный пучок

Второй механизм потери электронов заключается в том, что они покидают плазму, формируя пучок волнообразной формы [5].

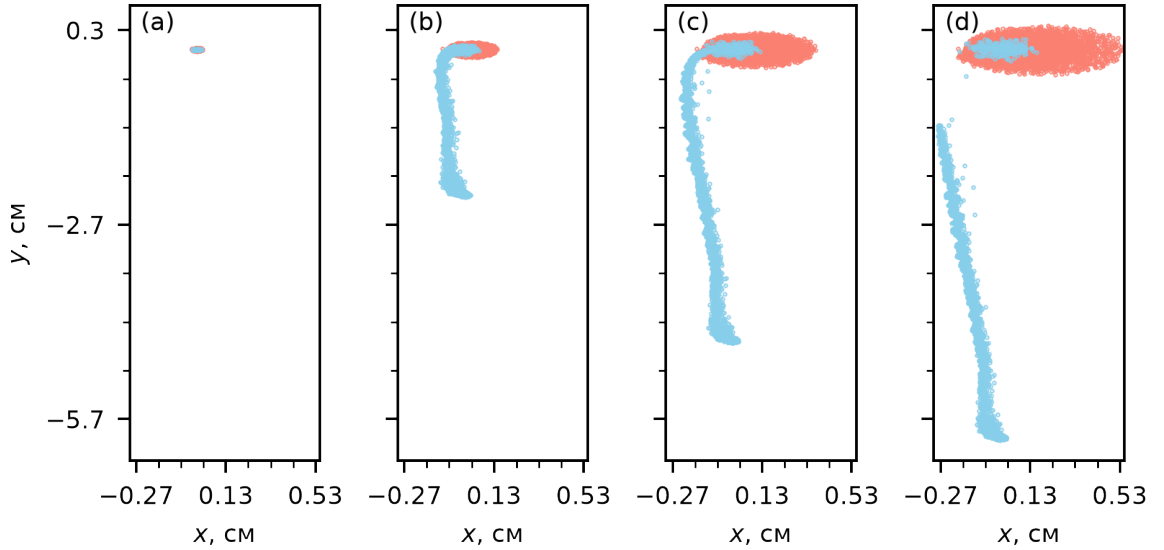


Рис. 5.2.2.1: Проекция координат электронов (синий) и ионов (красный) на плоскость XY при $B = 20$ Гс, $E = 10^{-4}$ статВ/см, $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9$ см $^{-3}$, $T_{e0} = 10$ К, в различные моменты времени: (a) $t = 10$ мкс, (b) $t = 20$ мкс, (c) $t = 30$ мкс, (d) $t = 40$ мкс.

На Рис. 5.2.2.1 изображены проекции электронов и ионов на плоскость XY в различные моменты времени для $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9$ см $^{-3}$, $T_{e0} = 10$ К, $B = 20$ Гс и $E = 10^{-4}$ статВ/см. Процесс формирования пучка изображён на Рис. 5.2.2.1(a) – Рис. 5.2.2.1(c). Отделившийся пучок дрейфует со скоростью V_d вдоль направления Y аналогично первому механизму. Это видно, например, из Рис. 5.2.2.1(c) и Рис. 5.2.2.1(d). Так, разница во времени между двумя наборами данных составляет 10 мкс. Разница в координатах нижней точки при этом составляет величину примерно 1.5 см. Отсюда получаем $V_d \approx -1.5 \cdot 10^5$ см/с, что равно $-cE/B$ [5]. На Рис. 5.2.2.1(d) показано, как уже сформировавшийся пучок отделился от плазмы. Кроме того, видно смещение оставшейся электронной плотности внутри плазмы.

Размер пучка вдоль направления X составляет величину порядка 10^{-2} см. Поскольку электроны колеблются вдоль этого направления с частотой, совпа-

дающей по порядку с $\omega_B = eB/m_e$, то приходится говорить лишь о средней величине.

Размер пучка вдоль направления Y (далее просто длина) зависит как от B так и от E и может достигать нескольких сантиметров. Особенности деформации пучка зависят от величин внешних полей.

Размер пучка вдоль направления Z не постоянен. Это видно из Рис. 5.2.2.2,

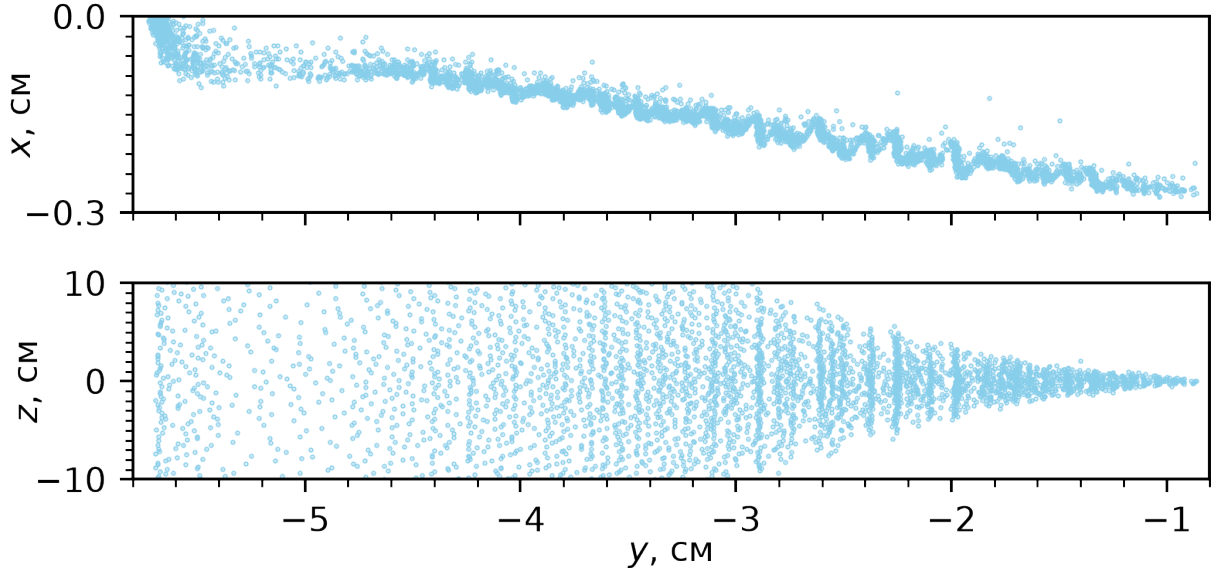


Рис. 5.2.2.2: Проекция электронов пучка на плоскость XY (верх) и ZY (низ) для $N = 10^4$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 10 \text{ K}$, $E = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$ и $B = 25 \text{ Гс}$.

где изображены детальные проекции электронов пучка на плоскости XY и YZ . Такое расширение пучка обусловлено тем, что электроны покинули плазму в различное время. При этом, вдоль данного направления действует лишь сила, обусловленная взаимодействием частиц. Со временем можно говорить о том, что покинувший плазму пучок электронов превратился в плоский слой.

Проекция уже сформировавшегося пучка на плоскость XY сохраняет свою форму с течением времени, что также видно из Рис. 5.2.2.1.

Моделирование проведено для нескольких наборов параметров. В одном наборе все параметры фиксированы, в то время как от запуска к запуску варьируется значение B . Оказывается, что увеличение индукции магнитного поля ведет к сокращению длины пучка [5]. Это изображено на Рис. 5.2.2.3, где при-

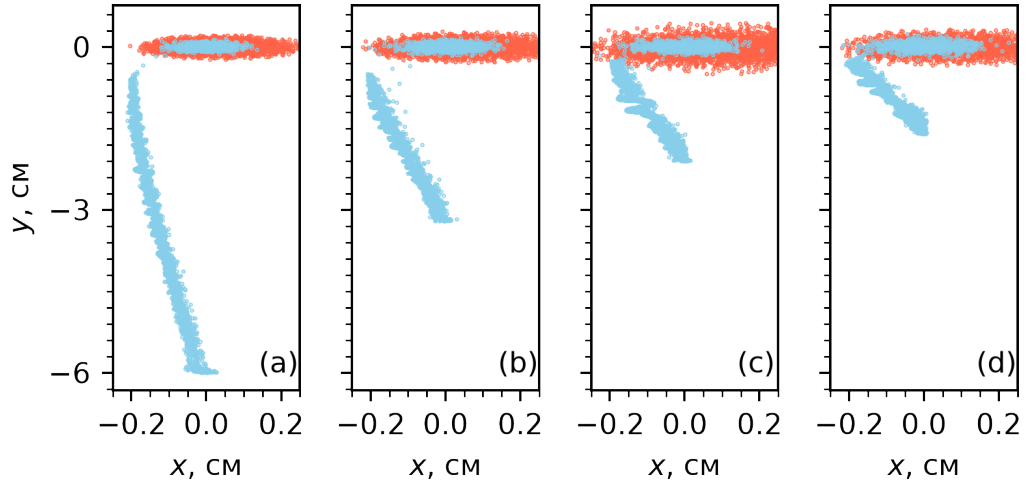


Рис. 5.2.2.3: Проекции координат ионов (красный) и электронов (синий) на плоскость XY в момент отделения от плазмы для $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 10 \text{ K}$, $E = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$ и различных значений магнитного поля в моменты отделения пучка от плазмы: (a) $B = 10 \text{ Гс}$, $t = 15 \text{ мкс}$, (b) $B = 25 \text{ Гс}$, $t = 20 \text{ мкс}$, (c) $B = 40 \text{ Гс}$, $t = 21 \text{ мкс}$, (d) $B = 60 \text{ Гс}$, $t = 24 \text{ мкс}$.

ведены проекции электронов на плоскость XY для $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 10 \text{ K}$, $E = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$ в момент отделения пучка от плазмы при различных значениях индукции магнитного поля $B = 10, 25, 40$ и 60 Гс .

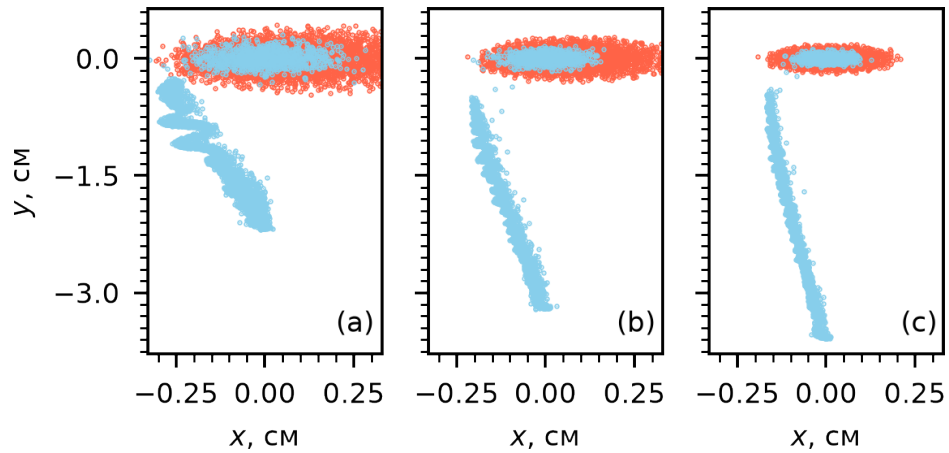


Рис. 5.2.2.4: Проекции координат ионов (красный) и электронов (синий) на плоскость XY в момент отделения от плазмы для $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 10 \text{ K}$, $B = 25 \text{ Гс}$, и различных значений напряженности электрического поля в моменты отделения пучка от плазмы: (a) $E = 5.3 \cdot 10^{-5} \text{ статВ/см}$, $t = 31 \text{ мкс}$; (b) $E = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$, $t = 20 \text{ мкс}$; (c) $E = 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$, $t = 14 \text{ мкс}$.

Если же от запуска к запуску изменять величину E , при прочих фиксированных параметрах, то наблюдается обратное. А именно, увеличение напряженности электрического поля ведёт к увеличению длины пучка [5]. Это изображено на Рис.5.2.2.4.

5.2.3 Диокотронная неустойчивость пучка

Волнообразная форма пучка обусловлена тем, что в электронной плазме развивается диокотронная (известная как slip-stream) неустойчивость. Механизм её возникновения аналогичен описанному в работе [81]. Деформация происходит в процессе формирования пучка, когда границы электронной плазмы движутся поперек линий магнитного поля с различными скоростями [5]. Это

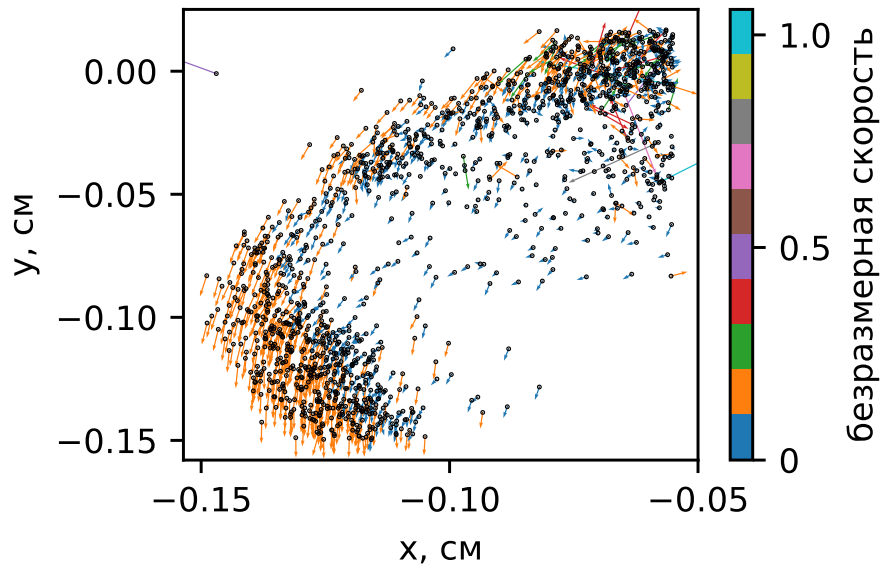


Рис. 5.2.3.1: Проекция электронов на плоскость XY и их усредненные скорости в процессе формирования пучка для $N = 10000$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 10 \text{ K}$, $E = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$ и $B = 25 \text{ Гс}$.

показано на Рис. 5.2.3.1 где изображены проекции координат электронов на плоскость XY вместе с их скоростями (стрелки), рядом с границей исходной плазмы. Величина скоростей (длина стрелок) нормирована на некоторое максимальное значение, встречающееся в наборе изображённых данных. Для того, что бы скорости отображали направления потоков, данные усреднены в преде-

лах нескольких шагов интегрирования. Видно, что когда электроны покидают плазму они изменяют направление своего движения на дрейфовое. Это приводит к тому, что в потоке электронов возникает два слоя, средние скорости движения в которых различны.

Моделирование показывает, что начальная пиковая концентрация плазмы не влияет на возникновение неустойчивости, по крайней мере, в диапазоне от $n_0 = 10^7 \text{ см}^{-3}$ до $n_0 = 10^{11} \text{ см}^{-3}$. Хотя повышение начальной температуры электронов приводит к ослаблению эффекта, мы наблюдали деформированный пучок в пределах от $T_{e0} = 10 \text{ К}$ до $T_{e0} = 100 \text{ К}$.

5.2.4 О реализации различных механизмов потери

Качественно, причины, приводящие к реализации того или иного механизма, в соответствии с которым электроны покидают плазму, представляется следующими.

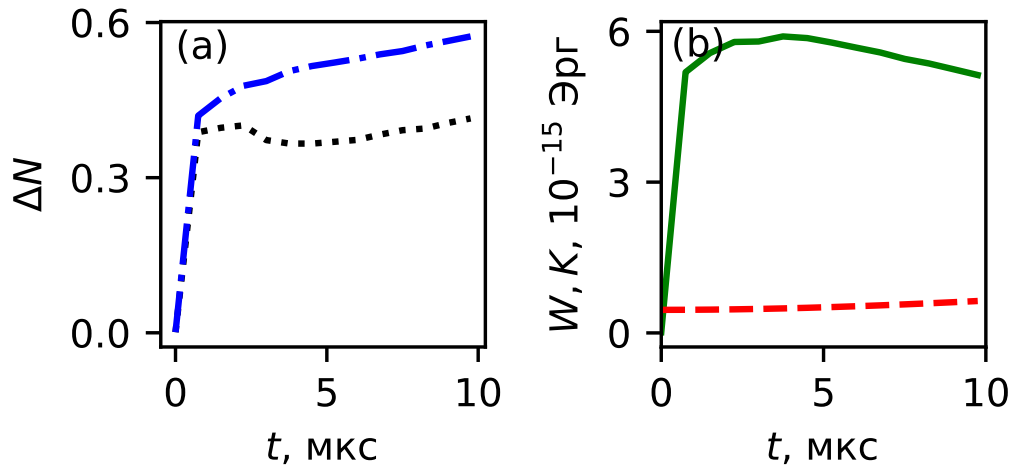


Рис. 5.2.4.1: Зависимости для $N = 5 \cdot 10^3$, $T_{e0} = 100 \text{ К}$, $B = 10 \text{ Гс}$ и $E = 10^{-5} \text{ статВ/см}$. (a) $\Delta N(t)$ при $n_0 = 10^7 \text{ см}^{-3}$ (пунктир) и $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$ (штрих-пунктир); (b) $K(t)$ (штрих) и $W(t)$ (сплошная) для $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$.

Формирование сгустка происходит тогда, когда электроны покидают плазму преимущественно за счет своей начальной кинетической энергии [5]. Внешнее электрическое поле $\mathbf{E}$, при этом, оказывает слабое влияние на их извлечение.

На Рис. 5.2.4.1(а) показана зависимость дисбаланса зарядов ΔN от времени для двух различных пиковых начальных пиковых концентраций. Резкий скачок вначале согласуется с данными, получаемыми из выражения (1.3.1.2). Затем наблюдается относительно медленный рост ΔN , который обусловлен слабым влиянием внешнего электрического поля.

Из выражений (3.2.1.4) и (3.3.2.1), можно оценить зависимость глубины потенциальной ямы от времени $W(t)$ следующим образом:

$$W(t) = \frac{e^2 \Delta N(t)}{\sigma(t)} \int_0^\infty \mathcal{E}(\xi) d\xi \approx \frac{e^2 \Delta N(t)}{3\sigma(t)}. \quad (5.2.4.1)$$

Кинетическую энергию электрона $K(t)$, сообщаемую ему внешним полем, можно оценить как:

$$K(t) \approx eE \cdot 3 \cdot \sigma_x(t). \quad (5.2.4.2)$$

Зависимости $\Delta N(t)$ и $\sigma_x(t)$, требуемые для вычисления этих величин, получены из данных моделирования.

На Рис. 5.2.4.1(b) изображены глубина потенциальной ямы $W(t)$ в сравнении с кинетической энергией электрона $K(t)$, сообщаемой ему внешним электрическим полем $E = 10^{-5}$ статВ/см для $n_0 = 10^7$ см⁻³, $T_{e0} = 100$ К и $B = 10$ Гс. В данных условиях $K(t) < W(t)$ для каждого момента времени.

Формирование электронного пучка происходит в том случае, если E достаточно велико [5]. При этом часть электронов, по прежнему, покидает плазму за счет своей начальной кинетической энергии. Однако затем продолжается постепенное извлечение электронов из плазмы за счет внешнего электрического поля. На Рис. 5.2.4.2(а) изображены зависимости $W(t)$ и $K(t)$ видно, что внешнее электрическое поле быстро сообщает электронам дополнительную кинетическую энергию, причём существенную. Ясно, что при прочих фиксированных параметрах величина E влияет на скорость извлечения электронов из плазмы. Так, на Рис. 5.2.4.2(b) изображены зависимости $\Delta N(t)$ для трёх различных значений E . Большим E соответствует большая скорость извлечения электронов

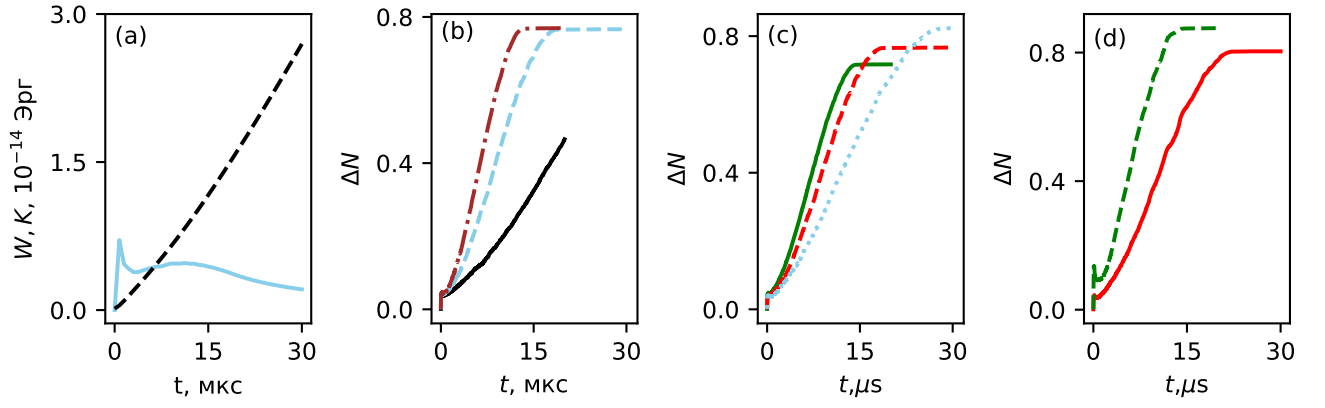


Рис. 5.2.4.2: Зависимость $\Delta N(t)$ при $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^{11} \text{ см}^3$, $T_{e0} = 10 \text{ K}$, для различных значений (a) $K(t)$ (штрих) и $W(t)$ (сплошная) при $B = 25 \text{ Гс}$ (штрих), $E = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$; (b) $E = 5 \cdot 10^{-5} \text{ статВ/см}$ (сплошная), $1.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$ (пунктир) и $2.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$ (штрих-пунктир) при фиксированном $B = 25 \text{ Гс}$; (c) $B = 10 \text{ Гс}$ (сплошная), $B = 25 \text{ Гс}$ (штрих), $B = 60 \text{ Гс}$ (пунктир) при фиксированном $E = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ статВ/см}$; (d) $T_{e0} = 10 \text{ K}$ (сплошная), $T_{e0} = 100 \text{ K}$ (штрих) при $E = 1.3 \text{ статВ/см}$ и $B = 40 \text{ Гс}$.

из плазмы. Извлечение электронов приводит к формированию потенциальной ямы.

Замечательной особенностью является и то, что ΔN увеличивается с ростом B . Хотя при этом, скорость извлечения электронов падает. Это продемонстрировано на Рис. 5.2.4.2(b).

На Рис. 5.2.4.2(d) изображены зависимости для двух различных T_{e0} . Большой начальной температуре электронов соответствует как больший скачок на ранних временах (за счет испарения электронов), так и более высокая скорость извлечения электронов из плазмы.

Во всех случаях, представленных на Рис. 5.2.4.2(b)—(d) момент выхода зависимости $\Delta N(t)$ на плато соответствует отделению пучка электронов от основной плазмы.

5.2.5 О возможной форме электронного сигнала

В реальном эксперименте возможно измерение электронного сигнала (см. раздел 1.2). Подобный сигнал можно получить и обработав результаты модели-

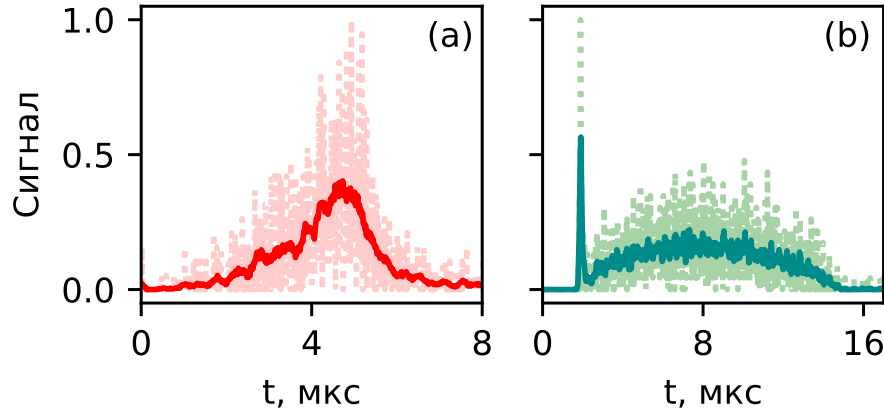


Рис. 5.2.5.1: Электронный сигнал, получаемый от: (a) сгустка электронов при $T_{e0} = 100$ K, $n_0 = 10^9$ см³, $E = 10^{-5}$ статВ/см и $B = 10$ Гс; (b) пучка электронов при $T_{e0} = 10$ K, $n_0 = 10^{11}$ см³, $E = 1.3 \cdot 10^{-4}$ статВ/см и $B = 50$ Гс. Везде $N = 5 \cdot 10^3$.

рования. Модель детектора сводится к подсчёту частиц, находящихся в некотором фиксированном объёме. Учёт частиц попавших в данный объём происходит лишь единожды. Поскольку детали получаемого при этом сигнала существенно зависят от выбираемого объёма, данный метод может лишь претендовать на качественный результат.

На Рис. 5.2.5.1(a) изображен предполагаемый вид сигнала, возникающего от сгустка электронов, а на Рис. 5.2.5.1(b) изображен предполагаемый вид сигнала от пучка электронов. Яркая линия (сплошная) есть результат обработки исходного сигнала (фон, пунктир) полиномиальным методом [82].

В обоих случаях “детектор” расположен поперек направления дрейфа на некотором от расстоянии начала координат.

5.3 Динамика ионов

Рассмотрим теперь подробнее динамику ионов и отметим её основные характерные особенности.

5.3.1 Распределение координат ионов

Сферическая симметрия распределения ионов несколько нарушается с течением времени. Общий вид функции распределения их координат наибольшим образом искажается вдоль направления X , поскольку это направление коллинеарно $\mathbf{E}$. Вдоль направления Y она изменяется слабо, а вдоль Z остаётся неизменной [5]. Это продемонстрировано на Рис. 5.3.1.1.

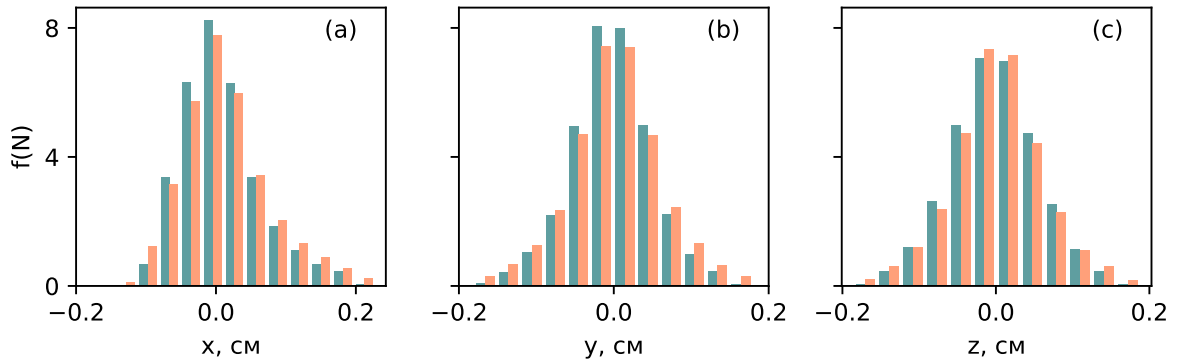


Рис. 5.3.1.1: Нормализованная гистограмма распределения координат ионов: (a) x , (b) y , (c) z . Всюду $t = 20$ мкс, $n_0 = 10^9$ см $^{-3}$, $E = 10^{-4}$ статВ/см, $B = 20$ Гс (серо-голубой) и $B = 50$ Гс (оранжевый).

На Рис. 5.3.1.2 приведены зависимости $\sigma_x(t)$ (штрих) $\sigma_y(t)$ (пунктир) и $\sigma_z(t)$ (штрих-пунктир) в сравнении с результатом, получаемым из первого уравнения системы [при условии извлечения корня] (1.5.1.8) (сплошная) для тех же параметров. Зависимости $\sigma_{x,y,z}(t)$ хорошо аппроксимируются функцией вида $\sigma(t) = \sigma_0 + at^p$, где a и p параметры приближения.

Из Рис. 5.3.1.2 (a) видно, что расширение плазмы поперек линий магнитного поля подавлено слабо и то лишь на временах до 10 мкс. Затем, как видно из Рис. 5.3.1.2 (b), ионы начинают расширяться быстрее чем в вакууме. Этот результат может показаться противоречащим эксперименту [25], где расширение плазмы поперек линий магнитного поля оказывается существенно подавленным.

Однако, в эксперименте [25] отсутствует внешнее электрическое поле. В этих условиях можно ожидать, что доля электронов, оставшихся в плазме, постоянна. Дисбаланс зарядов равен $\Delta N = 1 - N_e / N_i \approx 0.09 = \text{const}$ (здесь

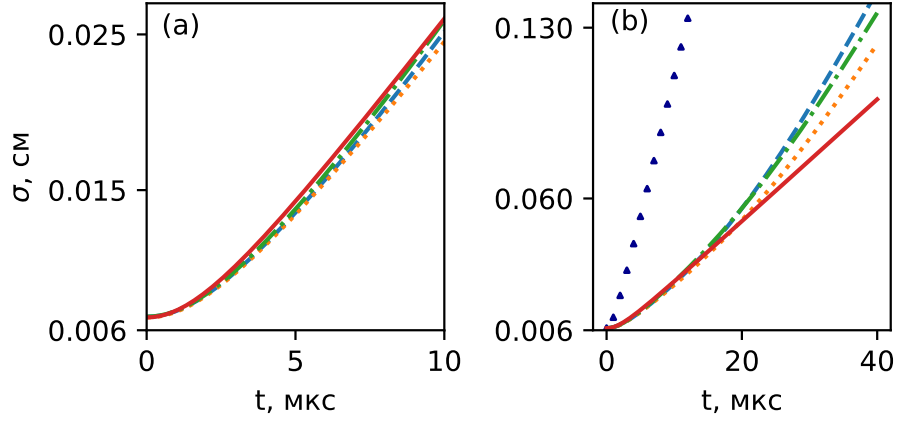


Рис. 5.3.1.2: Зависимость $\sigma_x(t)$ (штрих), $\sigma_y(t)$ (пунктир) и $\sigma_z(t)$ (штрих-пунктир) в сравнении с $\sigma(t)$ согласно (1.5.1.8) (сплошная) для $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $B = 20 \text{ Гс}$, $E = 10^{-4} \text{ статВ/см}$ на различных временных интервалах: (а) до 10 мкс; (б) до 40 мкс, треугольники представляют чистую ионную плазму для тех же параметров.

учтено (1.3.1.2)). Таким образом, плазму можно считать квазинейтральной и ион-ионное взаимодействие компенсируется не только внешним магнитным полем но и электронами плазмы.

Напротив, моделирование показывает, что наличие скрещенных постоянных однородных электрического и магнитного полей приводит к тому, что дисбаланс зарядов достигает больших значений. В частности, для условий, в которых получены данные Рис. 5.3.1.2 в дисбаланс зарядов ведет себя следующим образом: при $t = 10 \text{ мкс}$ $\Delta N = 0.25$, $t = 20 \text{ мкс}$ $\Delta N = 0.59$ и при $t \approx 34 \text{ мкс}$ $\Delta N \approx 0.94$. Ясно, что в данном случае плазму нельзя считать квазинейтральной и ион-ионное взаимодействие компенсируется электронами в гораздо меньшей степени, чем это имеет место при условиях эксперимента [25].

Таким образом, сравнительно быстрое расширение системы, несмотря на удерживающее влияние магнитного поля, вызвано нескомпенсированным кулоновским взаимодействием. Это происходит из-за того, что значительная часть электронов покидает плазму. Для демонстрации этого проведено моделирование чистой ионной плазмы (т.е. $\Delta N = 1 = \text{const}$), результаты которого приведены на Рис. 5.3.1.2 (б) в виде треугольников. Видно, что в этом случае расши-

рение системы происходит ещё быстрее.

5.3.2 Распределение скоростей ионов

Распределение скоростей ионов ведет себя подобно распределению их координат. На Рис. 5.3.2.1 изображены нормализованные гистограммы проекций

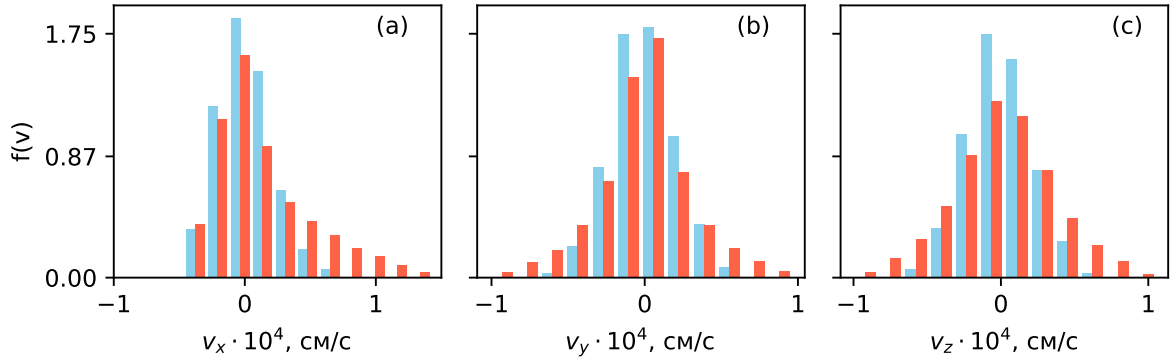


Рис. 5.3.2.1: Нормализованные гистограммы распределений проекций скоростей ионов: (a) v_x см/с; (b) v_y см/с; (c) v_z см/с; и двух моментов времени $t = 5 \mu\text{с}$ (голубой) и $t = 20 \mu\text{с}$ (красный). Всюду $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 10 \text{ К}$, $E = 10^{-4} \text{ статВ/см}$ и $B = 20 \text{ Гс}$.

скоростей ионов в два различных момента времени. С течением времени, наибольшее искажение наблюдается для $f(v_x)$, поскольку вдоль этого направления приложено внешнее электрическое поле. Распределение $f(v_y)$ становится более поджатым. Это обусловлено воздействием внешнего магнитного поля, поскольку направления X и Y перпендикулярны его линиям. Распределение $f(v_z)$ сохраняет свой начальный вид. Из Рис. 5.3.2.1 также видно, что на больших временах функции распределения расширяются. Это связано с тем, что дисбаланс зарядов становится существенным, и нескомпенсированное внутреннее электрическое поле плазмы приводит к росту радиальной составляющей скорости.

Температура ионов демонстрирует ряд особенностей. На Рис. 5.3.2.2 изображена зависимость $T_i(t)$ для различных величин магнитного поля. Значения вычислены при помощи (3.3.1.3). Главным отличием от случая расширения плазмы в вакуум является отсутствие колебаний, обусловленных локальным квазиравновесием плазмы (см. Рис. 3.3.1.1(b)). Кроме того, начальный разогрев ионов

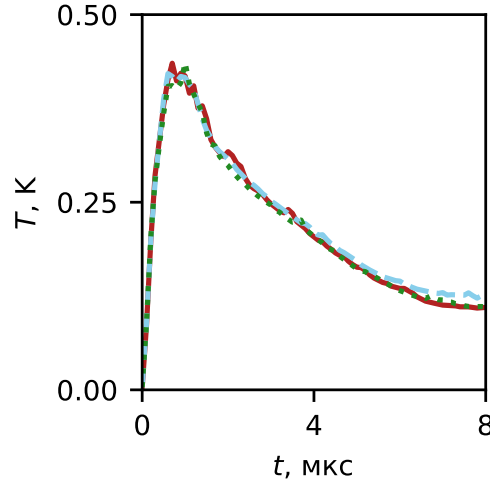


Рис. 5.3.2.2: Зависимость температуры ионов T_i от времени t для $N = 5 \cdot 10^3$, $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} = 10 \text{ K}$, $E = 10^{-4} \text{ статВ/см}$ и различных величин напряженности магнитного поля: $B = 20 \text{ Гс}$ (сплошная), $B = 30 \text{ Гс}$ (штрих) и $B = 50 \text{ Гс}$ (пунктир).

(disorder-induced heating) происходит дольше. Эти же явление наблюдается и в эксперименте [26].

5.4 Заключение к разделу

Моделирование показывает, что при расширении ультрахолодной плазмы в скрещенных постоянных однородных электрическом и магнитном полях возможно существование двух механизмов, в соответствии с которыми электроны покидают плазму. При этом, в обоих случаях, электроны, покинувшие плазму, дрейфуют с постоянной средней скоростью $V_d = -cE/B$ в направлении $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$.

Первый механизм проявляется в том, что от плазмы отделяется сгусток электронов, проекция которых на плоскость, образованную векторами $\mathbf{E}$ и $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ подобна проекции, формируемой электронами основной плазмы. Этот механизм реализуется при малом внешнем электрическом поле. При этом, электроны покидают плазму преимущественно за счет своей начальной кинетической энергии.

Второй механизм проявляется в том, что покидающие плазму электроны формируют пучок. При этом, его проекция плоскость, образованную векторами

$\mathbf{E}$ и $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ обладает характерной волнообразной формой. Деформация пучка обусловлена развивающейся в нём диокотронной неустойчивостью. Этот механизм реализуется когда электроны извлекаются из плазмы преимущественно за счет внешнего электрического поля.

В связи с тем, что существенная часть электронов извлекается из плазмы, ожидается слабое подавление её расширения магнитным полем.

Наконец, низкоэнергетический пучок электронов, подобный рассмотренному выше, может представлять интерес для электронной микроскопии, поскольку ультрахолодные атомы уже активно используются в этих целях [78–80]. Мы не приводим никаких численных характеристик пучка, связанных с данным вопросом. Это обусловлено тем, что наблюдаемые эффекты, прежде всего, нуждаются в экспериментальном подтверждении.

Заключение

Коротко отметит основные полученные результаты.

Верифицирована модель ультрахолодной плазмы, как системы классических взаимодействующих точечных зарядов.

При расширении ультрахолодной плазмы в вакуум, в следствие нарушения её электронейтральности, формируется ионный фронт. Процесс носит автомодельный характер. Получены оценки для времени формирования фронта $t_f \propto N^{1/6}/\sqrt{n_0}$ и скорости его движения $v_f \propto (n_0 N)^{1/6}$.

При расширении ультрахолодной плазмы в вакуум при воздействии внешнего постоянного квадрупольного магнитного поля внутри плазмы возникает сложный потенциальный “рельеф”. Это приводит к колебаниям радиальной скорости ионов. Продемонстрировано, что время удержания плазмы магнитным полем насыщается по мере роста величины градиента этого поля и слабо зависит от температуры электронов. Предложены критерии сопоставления результатов моделирования и эксперимента.

Численно предсказано, что при расширении ультрахолодной плазмы во внешних постоянных однородных скрещенных электрическом и магнитном полях возможно существование двух различных механизмов потери электронов плазмой. В одном случае покинувшие плазму электроны формируют сгусток, который дрейфует вдоль направления $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ с постоянной скоростью. В другом случае электроны покидают плазму, формируя протяженный пучок, который, аналогично первому случаю, дрейфует в том же направлении с постоянной скоростью. В пучке развивается диокотронная неустойчивость, которая приводит к его деформации.

Список литературы

1. Simulated expansion and ion front formation of ultracold plasma / E. Vikhrov, S. Bronin, [et al.] // *Physics of Plasmas*. — 2020. — Vol. 27, no. 12. — P. 120702.
2. Ion wave formation during ultracold plasma expansion / E. Vikhrov, S. Bronin, [et al.] // *Physical Review E*. — 2021. — Vol. 104, no. 1. — P. 015212.
3. Ultracold plasma expansion in quadrupole magnetic field / S. Bronin, E. Vikhrov, [et al.] // *Physical Review E*. — 2023. — Vol. 108, no. 4. — P. 045209.
4. Reply to “Comment on ‘Ultracold plasma expansion in quadrupole magnetic field’” / S. Bronin, E. Vikhrov, [et al.] // *Physical Review E*. — 2024. — Vol. 110, no. 2. — P. 027202.
5. *Vikhrov E., Zelener B.*, [et al.]. Diocotron instability in ultracold plasma // *Physical Review E*. — 2025. — Vol. 112, no. 6. — P. 065206.
6. Creation of an ultracold neutral plasma / T. Killian, S. Kulin, [et al.] // *Physical Review Letters*. — 1999. — Vol. 83, no. 23. — P. 4776.
7. Ultracold neutral plasmas / T. Killian, T. Pattard, [et al.] // *Physics Reports*. — 2007. — Vol. 449, no. 4/5. — P. 77–130.
8. *Lyon M., Rolston S.* Ultracold neutral plasmas // *Reports on Progress in Physics*. — 2016. — Vol. 80, no. 1. — P. 017001.
9. Magneto-optic trapping of lithium using semiconductor lasers / U. Schünemann, H. Engler, [et al.] // *Optics Communications*. — 1998. — Vol. 158, no. 1–6. — P. 263–272.
10. *Phillips W., Metcalf H.* Laser deceleration of an atomic beam // *Physical Review Letters*. — 1982. — Vol. 48, no. 9. — P. 596.

11. *Metcalf H., Van der Straten P.* Laser cooling and trapping. — Springer Science & Business Media, 1999.
12. Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure / E. Raab, M. Prentiss, [et al.] // *Physical Review Letters*. — 1987. — Vol. 59, no. 23. — P. 2631.
13. *Bergeman T., Erez G.*, [et al.]. Magnetostatic trapping fields for neutral atoms // *Physical Review A*. — 1987. — Vol. 35, no. 4. — P. 1535.
14. Steady-State Ultracold Plasma Created by Continuous Photoionization of Laser Cooled Atoms / B. Zelener, E. Vilshanskaya, [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2024. — Vol. 132, no. 11. — P. 115301.
15. Expansion of ultracold neutral plasmas with exponentially decaying density distributions / M. Warrens, G. Gorman, [et al.] // *Physics of Plasmas*. — 2021. — Vol. 28, no. 2.
16. Magnetic confinement of an ultracold neutral plasma / G. Gorman, M. Warrens, [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2021. — Vol. 126, no. 8. — P. 085002.
17. Fluorescence measurements of expanding strongly coupled neutral plasmas / E. Cummings, J. Daily, [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2005. — Vol. 95, no. 23. — P. 235001.
18. Using absorption imaging to study ion dynamics in an ultracold neutral plasma / C. Simien, Y. Chen, [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2004. — Vol. 92, no. 14. — P. 143001.
19. Electron screening and kinetic-energy oscillations in a strongly coupled plasma / Y. Chen, C. Simien, [et al.] // *Physical review letters*. — 2004. — Vol. 93, no. 26. — P. 265003.

20. Plasma oscillations and expansion of an ultracold neutral plasma / S. Kulin, T. Killian, [et al.] // Physical review letters. — 2000. — Vol. 85, no. 2. — P. 318.
21. *Twedt K., Rolston S.* Electronic detection of collective modes of an ultracold plasma // Physical Review Letters. — 2012. — Vol. 108, no. 6. — P. 065003.
22. *Castro J., McQuillen P.*, [et al.]. Ion acoustic waves in ultracold neutral plasmas // Physical Review Letters. — 2010. — Vol. 105, no. 6. — P. 065004.
23. *Zhang X., Fletcher R.*, [et al.]. Observation of an ultracold plasma instability // Physical review letters. — 2008. — Vol. 101, no. 19. — P. 195002.
24. Ultracold plasma expansion in a magnetic field / X. Zhang, R. Fletcher, [et al.] // Physical review letters. — 2008. — Vol. 100, no. 23. — P. 235002.
25. Ultracold neutral plasma expansion in a strong uniform magnetic field / T. Sprenkle, S. Bergeson, [et al.] // Physical Review E. — 2022. — Vol. 105, no. 4. — P. 045201.
26. Preliminary study of plasma modes and electron-ion collisions in partially magnetized strongly coupled plasmas / C. Pak, V. Billings, [et al.] // Physical Review E. — 2024. — Vol. 109, no. 1. — P. 015201.
27. *Pohl T., Pattard T.*, [et al.]. Kinetic modeling and molecular dynamics simulation of ultracold neutral plasmas including ionic correlations // Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics. — 2004. — Vol. 70, no. 3. — P. 033416.
28. *Pohl T., Pattard T.*, [et al.]. Relaxation to nonequilibrium in expanding ultracold neutral plasmas // Physical review letters. — 2005. — Vol. 94, no. 20. — P. 205003.
29. *Robicheaux F., Hanson J.* Simulated expansion of an ultra-cold, neutral plasma // Physics of Plasmas. — 2003. — Vol. 10, no. 6. — P. 2217–2229.

30. *Robicheaux F., Hanson J.* Simulation of the expansion of an ultracold neutral plasma // Physical review letters. — 2002. — Vol. 88, no. 5. — P. 055002.
31. *Sack C., Schamel H.* Plasma expansion into vacuum—A hydrodynamic approach // Physics Reports. — 1987. — Vol. 156, no. 6. — P. 311–395.
32. *Mora P.* Plasma expansion into a vacuum // Physical Review Letters. — 2003. — Vol. 90, no. 18. — P. 185002.
33. *Mora P.* Collisionless expansion of a Gaussian plasma into a vacuum // Physics of plasmas. — 2005. — Vol. 12, no. 11. — P. 112102.
34. *Sugita Y., Okamoto Y.* Replica-exchange molecular dynamics method for protein folding // Chemical physics letters. — 1999. — Vol. 314, no. 1/2. — P. 141–151.
35. *Durrant J., McCammon J.* Molecular dynamics simulations and drug discovery // BMC biology. — 2011. — Vol. 9, no. 1. — P. 71.
36. *Tse J.* Ab initio molecular dynamics with density functional theory // Annual review of physical chemistry. — 2002. — Vol. 53, no. 1. — P. 249–290.
37. Toward Ab Initio Reaction Discovery Using the Artificial Force Induced Reaction Method / S. Maeda, Y. Harabuchi, [et al.] // Annual review of physical chemistry. — 2023. — Vol. 74. — P. 287–311.
38. *Rapaport D.* The art of molecular dynamics simulation. — Cambridge university press, 2004.
39. *Caplan M., Freeman I.* Precise diffusion coefficients for white dwarf astrophysics // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2021. — Vol. 505, no. 1. — P. 45–49.
40. *Caplan M., Yaacoub D.* Universal Diffusion in Coulomb Crystals // Physical Review Letters. — 2024. — Vol. 133, no. 13. — P. 135301.

41. *Брушлинский К. В.* Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. — БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. — С. 1—15.
42. *Джесксон Д.* Классическая электродинамика. — Мир, 1965. — С. 163—168.
43. *Verlet L.* Computer "experiments" on classical fluids. II. Equilibrium correlation functions // *Physical Review*. — 1968. — Vol. 165, no. 1. — P. 201.
44. *Gingold R., Monaghan J.* Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // *Monthly notices of the royal astronomical society*. — 1977. — Vol. 181, no. 3. — P. 375–389.
45. Time stepping N-body simulations / T. Quinn, N. Katz, [et al.] // *arXiv preprint astro-ph/9710043*. — 1997.
46. *Бэдсел Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование. — Энергоатомиздат, 1989. — С. 1—19.
47. *Cary J., Hanson D.*, [et al.]. Numerical Methods for Plasma Simulation // *Physics Of Fluids*. — 1970. — Vol. 13. — P. 2267–2273.
48. *Matthews A.* Current advance method and cyclic leapfrog for 2D multispecies hybrid plasma simulations // *Journal of Computational Physics*. — 1994. — Vol. 112, no. 1. — P. 102–116.
49. *Taheri S., King J.*, [et al.]. Time-discretization of a plasma-neutral MHD model with a semi-implicit leapfrog algorithm // *Computer Physics Communications*. — 2022. — Vol. 274. — P. 108288.
50. *Takizuka T., Imano K.*, [et al.]. Double Leap-Frog Method for Large-Time-Step Particle Simulation to Keep Larmor Radius Small // *Plasma and Fusion Research*. — 2021. — Vol. 16. — P. 1203100–1203100.
51. *Кашурников В., Красавин А.* Численные методы квантовой статистики. — Физматлит, 2010. — С. 217—219.

52. *Muller M.* A comparison of methods for generating normal deviates on digital computers // Journal of the ACM. — 1959. — Vol. 6, no. 3. — P. 376–383.
53. *Hockney R., Eastwood J.* Computer simulation using particles. — crc Press, 1988.
54. *Greengard L., Rokhlin V.* A fast algorithm for particle simulations // Journal of computational physics. — 1987. — Vol. 73, no. 2. — P. 325–348.
55. *Tuckerman M., Berne B., [et al.].* Molecular dynamics algorithm for multiple time scales: Systems with disparate masses // The Journal of chemical physics. — 1991. — Vol. 94, no. 2. — P. 1465–1469.
56. *Morrone J., Zhou R., [et al.].* Molecular dynamics with multiple time scales: How to avoid pitfalls // Journal of chemical theory and computation. — 2010. — Vol. 6, no. 6. — P. 1798–1804.
57. Efficient multiple time scale molecular dynamics: Using colored noise thermostats to stabilize resonances / J. Morrone, T. Markland, [et al.] // The Journal of chemical physics. — 2011. — Vol. 134, no. 1. — P. 014103.
58. *Steele R.* Multiple-timestep ab initio molecular dynamics using an atomic basis set partitioning // The Journal of Physical Chemistry A. — 2015. — Vol. 119, no. 50. — P. 12119–12130.
59. *Abreu C., Tuckerman M.* Multiple timescale molecular dynamics with very large time steps: avoidance of resonances // The European Physical Journal B. — 2021. — Vol. 94, no. 11. — P. 231.
60. *Littell T., Skeel R., [et al.].* Error Analysis of Symplectic Multiple Time Stepping // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1997. — Vol. 34, no. 5. — P. 1792–1807.
61. *Plimpton S.* Fast parallel algorithms for short-range molecular dynamics // Journal of computational physics. — 1995. — Vol. 117, no. 1. — P. 1–19.

62. *Forum M. P. I.* MPI: A Message-Passing Interface Standard, Version 4.0 : tech. rep. / MPI Forum. — 2021. — URL: <https://www.mpi-forum.org/docs/mpi-4.0/mpi40-report.pdf>.
63. *Sanders J., Kandrot E.* CUDA by example: an introduction to general-purpose GPU programming. — Addison-Wesley Professional, 2010.
64. *Van Norton R.* The motion of a charged particle near a zero field point. — Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1961. — P. 12–13.
65. *W. S.* Electricity, Magnetism, and Light. — 1st ed. — Amsterdam, Boston : Academic Press, 2002.
66. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теория поля. Т. 2. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2003. — (Теоретическая физика).
67. *Tanberg R.* On the cathode of an arc drawn in vacuum // Physical Review. — 1930. — Vol. 35, no. 9. — P. 1080.
68. *Plyutto A.* Acceleration of positive ions in an expanding vacuum spark plasma // Zhur. Eksptl'. i Teoret. Fiz. — 1960. — Vol. 39.
69. *Hendel H., Reboul T.* Adiabatic acceleration of ions by electrons // The Physics of Fluids. — 1962. — Vol. 5, no. 3. — P. 360–362.
70. *Франк-Каменецкий Д.* Лекции по физике плазмы. — Атомиздат, 1968.
71. *Lyubonko A., Pohl T., [et al.].* Collective energy absorption of ultracold plasmas through electronic edge-modes // New Journal of Physics. — 2012. — Vol. 14, no. 5. — P. 053039.
72. Ion temperature evolution in an ultracold neutral plasma / P. McQuillen, T. Strickler, [et al.] // Physics of Plasmas. — 2015. — Vol. 22, no. 3. — P. 033513.

73. Wave steepening and shock formation in ultracold neutral plasmas / M. Warrens, N. Inman, [et al.] // *Physics of Plasmas*. — 2024. — Vol. 31, no. 11.
74. Exploring the crossover between high-energy-density plasma and ultracold neutral plasma physics / S. Bergeson, S. Baalrud, [et al.] // *Physics of Plasmas*. — 2019. — Vol. 26, no. 10. — P. 100501.
75. *Schlitters M., Miller M. Farley B.*, [et al.]. Comment on Ultracold plasma expansion in quadrupole magnetic field // *Physical Review E*. — 2024. — Vol. 110, no. 2. — P. 027201.
76. *Spitzer L.* Physics of fully ionized gases. — Interscience publishers a division of John Wiley, Sons, 1962.
77. *Huijts J., Luiten J.* The Coming of Age of the Ultracold Electron Source: A Review // arXiv preprint arXiv:2510.09889. — 2025.
78. Ultracold electron sources / O. Luiten, B. Claessens, [et al.] // *International Journal of Modern Physics A*. — 2007. — Vol. 22, no. 22. — P. 3882–3897.
79. Compact ultracold electron source based on a grating magneto-optical trap / J. Franssen, T. De Raadt, [et al.] // *Physical Review Accelerators and Beams*. — 2019. — Vol. 22, no. 2. — P. 023401.
80. *De Raadt T., Franssen J.*, [et al.]. Subpicosecond ultracold electron source // *Physical Review Letters*. — 2023. — Vol. 130, no. 20. — P. 205001.
81. *Knauer W.* Diocotron instability in plasmas and gas discharges // *Journal of Applied Physics*. — 1966. — Vol. 37, no. 2. — P. 602–611.
82. *Savitzky A., Golay M.* Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. // *Analytical chemistry*. — 1964. — Vol. 36, no. 8. — P. 1627–1639.